S. L. SOBOLEV

Paraschiv Ion - Willi -
- astaș Sibiu -
20. VIII. 55.

ECUAȚIILE FIZICII MATEMATICE

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA TEHNICĂ

С. Л. СОБОЛЕВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1950 Ленинград

PREFAȚĂ LA EDIȚIA ÎNTÎIA

Această carte a fost întocmită ca rezultat al prelucrării lecțiilor ținute de autor la Universitatea de Stat M. V. Lomonosov din Moscova. De aceea autorul a păstrat titlurile acestor lecții. Prin aceasta se explică și alegerea materialului al cărui volum a fost limitat de numărul orelor de curs.

Autorul exprimă profunda sa recunoștință academicianului V. I. Smirnov, care a parcurs cartea în manuscris, pentru o serie de observații foarte importante precum și profesorului V. V. Stepanov, pentru indicații utile.

S. Sobolev

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A II-a

Această a doua ediție a cursului de „Ecuațiile fizicii matematice" a fost supusă unei revizuiri considerabile în comparație cu prima ediție.

Revizuirea a avut în special drept scop înlăturarea diferitelor formulări nereușite, îndreptarea anumitor inexactități sau inegalități de stil, iar în anumite locuri a fost schimbată esența chestiunilor expuse.

Modificările cele mai de seamă față de prima ediție constau în simplificarea considerabilă a expunerii teoriei integralelor Lebesgue multiple, într-o nouă expunere a teoriei ecuațiilor integrale cu nuclee cu singularitate slabă și într-o fundamentare mai exactă a metodei lui Fourier.

Materialul lecției consacrate teoriei integralelor Lebesgue nu se referă în esență la teoria ecuațiilor fizicii matematice. Înafară de aceasta, există în momentul de față o serie de expuneri asupra teoriei integralelor Lebesgue la care ne-am fi putut referi. Autorul, însă, a considerat necesar să păstreze această lecție sub o formă mult simplificată și în noua ediție, atît pentru referințe cît și pentru motivul că ea conține un nou mod de a expune teoria integralelor Lebesgue, care ar putea fi mai accesibil unor categorii de cititori.

La citirea cărții se poate lăsa de o parte această lecție, dacă considerăm drept bune acele rezultate la care ne vom referi în cele ce urmează.

Lecția consacrată metodei lui Ritz a fost exclusă în a doua ediție. Materialul ei este întrucîtva străin de celelalte capitole și, înafară de aceasta, sub forma sa anterioară, această lecție nu dădea în nici un fel o idee completă asupra metodelor variaționale din fizica matematică.

La pregătirea celei de-a doua ediții autorul a căutat să ia în considerație observațiile valoroase care i-au fost făcute de diferite persoane cărora el le exprimă recunoștința sa. Foarte multe indicații prețioase asupra lipsurilor, pe care le avea cartea, au fost date de academicianul V. I. Smirnov, căruia autorul îi este deosebit de recunoscător.

S. Sobolev

LECȚIA I

DEDUCEREA ECUAȚIILOR FUNDAMENTALE

Obiectul teoriei ecuațiilor fizicii matematice îl formează studiul ecuațiilor diferențiale, integrale și funcționale, care descriu diferite fenomene ale naturii. Așa cum se întîmplă de obicei, este destul de greu să determinăm cadrul exact al acestei discipline. Înafară de aceasta, marea diversitate a chestiunilor care se referă la ecuațiile fizicii matematice, nu permite, cît de cît, ca acestea să fie cuprinse în întregime într-un curs universitar. Conținutul cărții de față alcătuiește numai o parte din teoria vastă a ecuațiilor fizicii matematice. Aici au intrat numai acele elemente, care ni s-au părut mai importante pentru o luare de contact inițială cu această teorie.

Cursul nostru este închinat în special studierii ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea cu o singură funcție necunoscută și în particular studiului ecuației undelor, ecuației lui Laplace și ecuației căldurii, denumite de obicei ecuațiile clasice ale fizicii matematice. Concomitent, vom dezvolta și teoria necesară a chestiunilor anexe.

§ 1. Formula lui Ostrogradsky

Înainte de a trece la deducerea acelor ecuații ale fizicii matematice de care ne vom ocupa în cele ce urmează, să amintim o formulă a calculului integral, care se referă la transformarea integralelor de suprafață în integrale de volum.

Fie $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ și $R(x, y, z)$ trei funcții de variabilele x, y, z, definite într-un anumit domeniu D și care au în acel domeniu derivate parțiale continue de ordinul întîi în raport cu x, y și z [1]). Să considerăm în D o suprafață închisă S, alcătuită

[1]) Astfel de funcții se numesc funcții de clasa C^1 în domeniul D. În general, o funcție este de clasa C^2 într-un domeniu D, dacă este continuă în acel domeniu împreună cu derivatele sale parțiale pînă la ordinul r inclusiv (N. Red. E.T.).

dintr-un număr finit de porțiuni având plane tangente, care variază continuu.

O asemenea suprafață se numește *netedă pe porțiuni*. Vom presupune, înafară de aceasta, că dreptele paralele cu axele de coordonate sau întîlnesc suprafața într-un număr finit de puncte sau au în comun cu aceasta un segment întreg.

Să considerăm integrala :

$$\iint_S [P\cos(nx) + Q\cos(ny) + R\cos(nz)]\,dS, \qquad (I,1)$$

în care am notat $\cos(nx)$, $\cos(ny)$ și $\cos(nz)$ cosinii unghiurilor pe care le formează *normala interioară* la suprafața S cu axele de coordonate, iar cu dS, elementul pozitiv de suprafață. Folosind notațiile vectoriale putem considera P, Q, R ca fiind componentele unui vector, pe care îl notăm cu o singură literă $\vec{T}$ [1]). Atunci

$$P\cos(nx) + Q\cos(ny) + R\cos(nz) = T_n,$$

unde T_n este proiecția vectorului $\vec{T}$ pe direcția normalei interioare.

Teorema clasică a calculului integral ne permite să trecem de la integrala de suprafață (I,1) la o integrală de volum extinsă asupra domeniului D mărginit de suprafața S, care satisface restricțiile enumerate mai sus. Vom avea :

$$\iint_S [P\cos(nx) + Q\cos(ny) + R\cos(nz)]\,dS =$$

$$= -\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

sau cu notațiile vectoriale :

$$\iint_S T_n\,dS = -\iiint_D \operatorname{div}\vec{T}\,dv, \qquad (I,2)$$

unde dv reprezintă elementul de volum, iar :

$$\operatorname{div}\vec{T} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad (I,3)$$

(semnul div se citește „divergență").

[1]) Conform cu stasul în vigoare vectorii sînt notați cu o săgeată deasupra literei. (N. Red. E. T.).

Formula prezentată de noi este valabilă în condiții mult mai generale în ceea ce privește suprafața S. În particular formula (I, 2) are loc, oricare ar fi suprafața netedă pe porțiuni S, care mărginește un anumit domeniu D.

În cele ce urmează, dacă nu se vor face rezerve, vom înțelege prin cuvîntul „suprafață" o suprafață netedă pe porțiuni.

Din formula (I, 2), decurge o consecință importantă.

L e m a 1. *Fie F o funcție definită într-un anumit domeniu al spațiului euclidian cu trei dimensiuni. Pentru ca să aibă loc egalitatea :*

$$\iint_S T_n\,dS - \iiint_\Omega F\,dv = 0, \qquad (I,4)$$

oricare ar fi suprafața închisă S, trasată în interiorul domeniului în care este definită funcția vectorială $\vec{T}$ și care mărginește domeniul Ω, este necesar și suficient să aibă loc egalitatea [1]) :

$$\operatorname{div}\vec{T} + F = 0.$$

Aplicînd formula (I, 2), egalitatea (I, 4) poate fi adusă la forma :

$$\iiint_\Omega (\operatorname{div}\vec{T} + F)\,dv = 0.$$

După aceasta, suficiența ipotezei din lemă devine evidentă. Să stabilim necesitatea ei. Într-adevăr, dacă într-un punct oarecare A, precum și în vecinătatea lui (în baza continuității) funcția $\operatorname{div}\vec{T} + F$ ar fi diferită de zero, de exemplu pozitivă, integrala :

$$\iiint_\omega (\operatorname{div}\vec{T} + F)\,dv$$

extinsă la domeniul mic ω din jurul lui A n-ar fi egală cu zero iar membrul stîng (I, 4) ar fi și el diferit de zero. Prin urmare, presupunerea noastră contrazice ipoteza. Necesitatea egalității :

$$\operatorname{div}\vec{T} + F = 0$$

este demonstrată.

La fel, poate fi demonstrată o lemă analogă pentru domeniile bidimensionale din plan.

[1]) F este de clasa C^0, iar $\vec{T}$ de clasa C^1 cel puțin (N. Red. E.T.).

§ 2. Ecuația coardei vibrante

Să considerăm o coardă întinsă între două puncte. Numim coardă un corp solid a cărui lungime întrece în mod considerabil celelalte dimensiuni. Presupunem tensiunea, care acționează asupra acestui corp, considerabilă. De aceea, rezistența sa la flexiune poate fi neglijată în raport cu tensiunea.

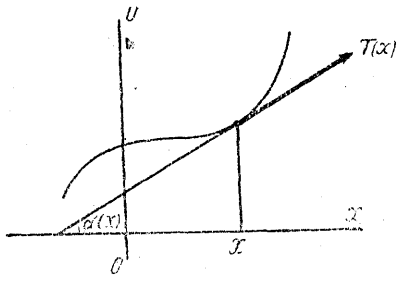

Fig. 1.

Să presupunem că direcția acestei coarde coincide în starea ei de repaus cu direcția axei Ox. Sub influența unor forțe transversale, ea capătă o altă formă care, în general, nu este rectilinie.

Dacă într-un punct oarecare x tăiem coarda în două, influența pe care o exercită partea din dreapta asupra părții din stînga se exprimă prin intermediul unei forțe $\vec{T}(x)$ orientate după tangenta la linia coardei (fig. 1).

Să presupunem pentru simplificarea raționamentului că mișcarea coardei are loc într-un singur plan și să notăm prin u elongația coardei de la poziția de echilibru. Fie $u = u(x, t)$ ecuația liniei deformate a coardei din planul xOu. Să notăm prin $\rho(x)$, densitatea liniară a coardei, adică limita raportului masei unei porțiuni elementare a coardei la lungimea sa.

Vom considera la început o coardă care se află în echilibru.

Presupunem că coarda se găsește sub acțiunea unei sarcini $p(x)$, care acționează transversal. Cu alte cuvinte, dacă ne fixăm asupra porțiunii sale $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, forța aplicată acestei porțiuni este îndreptată după axa u, iar mărimea ei este $\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$.

Să notăm cu $\alpha(x)$ unghiul pe care îl formează direcția tangentei la coardă cu axa Ox; componenta după axa u a tensiunii care acționează în punctul x_2 va fi:

$$\left|\vec{T}(x_2)\right| \sin \alpha(x_2) = T(x_2) \sin \alpha(x_2),$$

unde $T(x)$ este modulul (lungimea) vectorului $\vec{T}(x)$, iar componenta tensiunii după axa u în punctul x_1 va fi:

$$-\left|\vec{T}(x_1)\right| \sin \alpha(x_1) = -T(x_1) \sin \alpha(x_1).$$

Se știe că:

$$\sin \alpha = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}.$$

considerînd mărimea $\frac{\partial u}{\partial x}$ mică și neglijînd pătratul ei, obținem condiția de echilibru pentru porțiunea de coardă considerată sub forma:

$$T \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - T \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1} + \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx = 0. \qquad \text{(I, 5)}$$

Este evident că:

$$T \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - T \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx.$$

Condiția (I, 5) devine deci:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) + p(x)\right] dx = 0. \qquad \text{(I, 6)}$$

Este evident că funcția de sub semnul integral (I, 6) trebuie să fie identic nulă (altfel am putea găsi intervale $[x_1, x_2]$ pentru care integrala (I, 6) să nu se anuleze) iar ecuația (I, 6) se transcrie sub forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) + p(x) = 0. \qquad \text{(I, 7)}$$

Ecuația (I, 7) este ecuația de echilibru a coardei sub acțiunea sarcinii transversale $p(x)$.

Dacă vom trece acum de la cazul static la cel dinamic, cu alte cuvinte, dacă vom considera vibrațiile coardei, atunci

folosind principiul lui d'Alembert, trebuie să includem în ecuația de echilibru și forțele de inerție ale coardei, care au expresia :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(- \rho (x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx.$$

Condiția de echilibru ia forma :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x) \right] dx = 0,$$

iar ecuația coardei vibrante va fi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x) = 0. \qquad \text{(I, 8)}$$

Componenta după axa Ox a tuturor forțelor, care acționează asupra coardei trebuie să fie nulă, deoarece sarcina a fost presupusă transversală. Aceasta ne permite să scriem egalitatea :

$$T \cos \alpha \,|_{x=x_2} - T \cos \alpha \,|_{x=x_1} = 0.$$

Mai presupunem și că tensiunea nu depinde de timp. Atunci cu aproximația unor cantități mici de ordin superior, vom avea

$$T \,|_{x=x_1} = T \,|_{x=x_2},$$

sau :

$$T = \text{const.}$$

Dacă înafară de aceasta și densitatea este constantă, iar sarcina $p(x)$ este nulă, ecuația (I, 8), ia forma :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{(I, 9)}$$

unde :

$$a^2 = \frac{T}{\rho} = \text{const.}$$

Ecuația (I, 9) a fost studiată încă în sec. XVIII de Daniel Bernoulli, d'Alembert și Euler.

§ 3. Ecuația vibrațiilor membranei

Să considerăm o peliculă, adică un corp solid foarte subțire și întins uniform după toate direcțiile. Presupunem că aceasta este așezată în stare de repaus în planul xOy. Vom admite că această peliculă este atît de subțire încît nu opune nici o rezistență la încovoiere. Numim o astfel de peliculă membrană.

Să presupunem că în stare deformată ecuația ei este :

$$u = u(t, x, y).$$

Vom considera că oricare ar fi porțiunea de suprafață S a acestei membrane pe care am izola-o, asupra acestei porțiuni acționează din partea restului membranei după direcția normalei la contur tensiunea uniform distribuită $\vec{T}$, care se găsește în planul tangent la membrană (v. fig. 2).

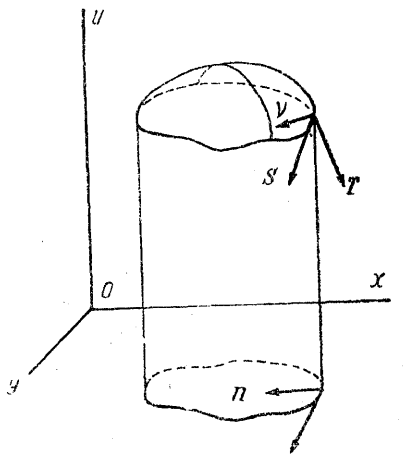

Fig. 2

Să scriem ecuația de echilibru a porțiunii de membrană S, mărginită de curba s și care se află sub acțiunea unor forțe transversale. Componenta tensiunii după axa u, se va exprima cu ajutorul integralei :

$$\int_s T \cos (\vec{lu}) ds, \qquad \text{(I, 10)}$$

unde T este lungimea vectorului tensiune $\vec{T}$, iar cu $\vec{l}$ am notat un vector oarecare, care are direcția tensiunii, Să calculăm $\cos (\vec{lu})$.

Direcția lui $\vec{l}$ este, conform ipotezei, direcția perpendicularei comune conturului s și vectorului orientat după normala interioară $\vec{\nu}$ la suprafața $u = u(t, x, y)$. La rîndul său, orice vector $\vec{s}$,

orientat după tangenta la conturul s, este perpendicular pe normala $\vec{\nu}$ și pe vectorul unitate $\vec{n}$ orientat după normala interioară la proiecția conturului s pe planul xOy, deoarece vectorul tangent $\vec{s}$ și tangenta la proiecția lui s în planul xOy se găsesc în planul tangent al cilindrului proiectant.

Drept vector $\vec{s}$, putem lua produsul vectorial:

$$\vec{n} \times \vec{\nu}.$$

Să considerăm vectorul $\vec{l_1}$ determinat de formula:

$$\vec{l_1} = (\vec{n} \times \vec{\nu}) \times \vec{\nu}$$

În baza formulelor geometriei analitice, avem:

$$\vec{l_1} = -\vec{n}\,\vec{\nu}^2 + \vec{\nu}\,(\vec{n}\,\vec{\nu})$$

Luînd în considerație că vectorul $\vec{n}$ are componentele $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, 0 și că vectorul $\vec{\nu}$ are componentele: $-\frac{\partial u}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial y}$, 1, și neglijînd mărimi de ordinul al doilea care conțin pe $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ și $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, obținem pentru componentele lui $\vec{l_1}$, expresiile:

$$-\cos(nx), \quad -\cos(ny), \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx) - \frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny),$$

Lungimea vectorului $\vec{l_1}$ este egală cu unitatea cu aproximația unor cîtimi de ordin superior. De aceea, fără a micșora precizia, putem considera pe $\vec{l_1}$ egal cu vectorul unitate $\vec{l}$, îndreptat după linia de acțiune a tensiunii.

Introducînd această expresie în ecuația de echilibru a membranei, care în cazul de față are forma:

$$\iint_{\omega} p(x, y)\,dx\,dy + \int_{s} T\cos(\vec{lu})\,ds = 0,$$

unde am notat cu $p(x, y)$ mărimea sarcinii care acționează transversal și raportată la unitatea de suprafață, iar cu ω, proiecția lui S pe planul xOy, obținem:

$$\iint_{\omega} p(x, y)\,dx\,dy - \int_{s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)\right) T\,ds = 0,$$

sau în baza lemei 1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial u}{\partial y}\right) + p(x, y) = 0. \qquad \text{(I. 11)}$$

Ecuația vibrațiilor membranei se scrie sub forma:

$$\iint_{\omega}\left(p(x, y) - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dx\,dy -$$

$$-\int_{s} T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx) - \frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)\right) ds = 0,$$

unde $\rho = \rho(x, y)$ este densitatea membranei, raportată la unitatea de suprafață, sau conform lemei 1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial u}{\partial y}\right) + p(x, y) - \rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad \text{(I. 12)}$$

Din (I, 12), dacă T și ρ sînt constanți, obținem ecuația:

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x, y) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad \text{(I, 13)}$$

Suma $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sau, în spațiul cu trei dimensiuni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

se numește adesea *operatorul lui Laplace* (laplacianul) și se notează cu simbolul Δu. Cu acestea, ecuația (I, 13) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\Delta u + \frac{p(x, y)}{\rho}, \qquad \text{(I, 14)}$$

în care :

$$a^2 = \frac{T}{\rho} = \text{const.}$$

§ 4. Ecuația de continuitate pentru mișcarea unui fluid și ecuația lui Laplace

Înainte de a trece la deducerea ecuației, denumită ecuația continuității, vom demonstra o formulă importantă din analiza matematică. Să considerăm o suprafață închisă oarecare $S(t)$ netedă pe porțiuni, depinzînd de parametrul t și care mărgineşte un volum variabil $\Omega(t)$. Fie $\rho\ (x, y, z, t)$ o funcție oarecare de coordonate și de timpul t. Să considerăm integrala :

$$Q(t) = \iiint_{\Omega(t)} \rho\, dx\, dy\, dz$$

și să ne propunem calcularea derivatei în raport cu timpul a acestei expresii.

Să considerăm la început cazul particular cînd volumul $\Omega(t)$ este determinat de inegalitățile :

$$0 \leqslant z \leqslant \varphi\ (x, y, t),$$

unde $z = \varphi\ (x, y, t)$ este ecuația unei suprafețe netede ; derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ este mărginită : $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right| \leqslant M$.

Să presupunem încă, fără a micșora generalitatea, că suprafața $z = \varphi\ (x, y, t)$ nu are porțiuni paralele cu planul $z = 0$ pentru nici una din valorile lui t.

În acest caz, avem :

$$Q(t) = \iint_{\varphi\,(x, y, t) \geqslant 0} \left[\int_0^{\varphi} \rho\ (x, y, z, t)\ dz\right] dx\, dy.$$

Să alcătuim raportul diferențelor necesar calculării lui $\frac{\partial Q}{\partial t}$:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left\{ \iint_{\varphi\,(t+\Delta t) \geqslant 0} \left[\int_0^{\varphi(t+\Delta t)} \rho\, dz \right] dx\, dy - \iint_{\varphi\,(t) \geqslant 0} \left[\int_0^{\varphi(t)} \rho\, dz \right] dx\, dy \right\}.$$

(Pentru simplificarea scrisului, am lăsat de o parte argumentele x, y și z la φ și ρ). Transformări simple ne dau :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \iint_{\substack{\varphi(t) \geqslant 0 \\ \varphi(t+\Delta t) \geqslant 0}} \left[\int_0^{\varphi(t)} \frac{\rho(t + \Delta t) - \rho(t)}{\Delta t}\, dz \right] dx\, dy +$$

$$+ \iint_{\substack{\varphi(t) \geqslant 0 \\ \varphi(t+\Delta t) \geqslant 0}} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t+\Delta t)} \rho(t + \Delta t)\, dz \right] dz\, dy -$$

$$- \iint_{\substack{\varphi(t) \geqslant 0 \\ \varphi(t+\Delta t) \leqslant 0}} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\varphi(t)} \rho(t)\, dz \right] dx\, dy +$$

$$+ \iint_{\substack{\varphi(t) \leqslant 0 \\ \varphi(t+\Delta t) \geqslant 0}} \left[\int_0^{\varphi(t+\Delta t)} \rho(t + \Delta t)\, dz \right] dx\, dy.$$

Să trecem acum la limită pentru $\Delta t \to 0$. Limitele ultimilor doi termeni sînt nuli. Într-adevăr, pentru fiecare din ele, funcția de sub semnul integral este mărginită deoarece :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\varphi(t)} \rho\ (t)\, dz = \frac{\varphi(t)}{\Delta t} \left(\frac{1}{\varphi(t)} \int_0^{\varphi(t)} \rho(t)\, dz \right).$$

Vom avea : $\left|\frac{\varphi(t)}{\Delta t}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(t) - \varphi(t + \Delta t)}{\Delta t}\right| \leqslant M,$

iar cel de-al doilea factor este mărginit în baza teoremei mediei ; pe de altă parte domeniul lor de integrare tinde către zero. Trecînd la limită în primele două integrale și aplicînd din nou teorema mediei, obținem :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t+\Delta t)} \rho\ (t + \Delta t)\, dz =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \left[\frac{1}{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)} \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t+\Delta t)} \rho\ (t + \Delta t)\ dz \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, \rho.$$

De aici :

$$\frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \iint\limits_{\varphi \geqslant 0} \left[\int_0^{\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dz \right] dx\, dy + \iint\limits_{z=\varphi} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dy =$$

$$= \iiint\limits_{Q} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz + \iint\limits_{S} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos(nz)\, dS.$$

Expresia $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ poartă numele de viteză aparentă a mișcării suprafeței $S(t)$ după direcția axei z. Ea admite o interpretare geometrică foarte simplă. Să ne închipuim familia de suprafețe $S(t)$ sub forma explicitată în raport cu t :

$$t = S(x, y, z).$$

Atunci :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial z}}.$$

Însă $\frac{\partial t}{\partial z}$ este componenta după axa z a vectorului grad t, orientat după normala la suprafața S și avînd următoarele componente :

$$\frac{\partial t}{\partial n} \cos(nx), \quad \frac{\partial t}{\partial n} \cos(ny), \quad \frac{\partial t}{\partial n} \cos(nz).$$

De aici :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial z}} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n} \cos(nz)}.$$

Expresia $\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}}$ se numește *viteza aparentă a mișcării* suprafeței după direcția normalei. O vom nota cu v_n. Pentru viteza mișcării aparente a suprafeței S după direcția axei z (această mărime o notăm cu v_z) avem :

$$v_z = \frac{v_n}{\cos(nz)}.$$

De aceea :

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Dacă suprafața S este alcătuită din particule materiale, care se mișcă cu viteza v, viteza în direcția normalei va fi :

$$v_n = v_x \cos(nx) + v_y \cos(ny) + v_z \cos(nz),$$

și putem scrie formula noastră sub forma :

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_{Q(t)} \rho\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{Q(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz + \iint\limits_{S(t)} \rho\, v_n\, dS. \qquad (1,15)$$

În cazul general, cînd suprafața $S(t)$ are o formă oarecare, obținem aceeași formulă, întrucît suprafața $S(t)$ poate fi totdeauna descompusă într-un număr finit de porțiuni, astfel încît pentru fiecare porțiune, dreptele paralele la una dintre axele de coordonate să întîlnească partea variabilă a frontierei acestei porțiuni numai într-un singur punct.

Este util să dăm o ilustrare fizică intuitivă a formulei (I, 15). Să separăm la un moment dat t pe suprafața S o porțiune elementară oarecare dS și să ducem traiectoriile tuturor punctelor care aparțin lui dS în intervalul de timp $(t,\ t + \Delta t)$. Această porțiune umple un volum, care coincide aproximativ cu un cilindru oblic ale cărui generatoare au forma $\vec{v}dt$, unde $\vec{v}$ este vectorul vitezei mișcării suprafeței. Volumul acestui cilindru este egal cu produsul dintre suprafața bazei prin înălțime, cu alte cuvinte $v_n\, dt\, dS$. Întreaga creștere a integralei $\iiint \rho\, d\Omega$ produsă de deplasarea suprafeței S, este aproximativ egală cu integrala :

$$\iint\limits_{S} \rho v_n\, dt\, dS.$$

Împărțind această expresie cu dt și calculînd separat creșterea lui Q, condiționată de variația lui ρ, obținem formula (I, 15).

Formula (I, 15) ne permite să obținem ecuația care exprimă faptul că cantitatea de fluid în mișcare, este constantă. Să presupunem că mișcarea fluidului are loc într-o anumită porțiune a spațiului, componentele vitezei $v_x\,(x, y, z, t)$, $v_y\,(x, y, z, t)$ și $v_z(x, y, z, t)$ fiind funcții date de coordonate și timp. Să ne imaginăm o suprafață materială $S(t)$ alcătuită din aceleași particule în mișcare și care mărginește un anumit volum variabil $\Omega(t)$.

Cantitatea de fluid, care se găsește în interiorul volumului $\Omega(t)$, este :

$$Q = \iiint_{\Omega(t)} \rho\,(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz,$$

unde $\rho\,(x, y, z, t)$ este densitatea fluidului.

Dacă fluidul nici nu intră, nici nu iese, atunci cantitatea de fluid într-un asemenea volum trebuie să rămînă constantă. Derivînd în raport cu t, obținem :

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,d\Omega + \iint_{S(t)} \rho v_n\,dS = 0.$$

Această ecuație trebuie să aibă loc pentru orice suprafață S și oricare ar fi timpul t. Utilizînd lema 1, obținem :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \qquad \text{(I, 16)}$$

sau sub formă dezvoltată :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.$$

Aceasta este așa numita *ecuație de continuitate*. Să arătăm încă o aplicație a acestei ecuații pentru cazul mișcării staționare a unui fluid omogen și incompresibil. Problema mișcării potențiale a unui fluid incompresibil, este, de fapt, problema căutării unei funcții necunoscute V, astfel încît :

$$\vec{v} = \operatorname{grad} V \text{ sau } v_x = \frac{\partial V}{\partial x},\ v_y = \frac{\partial V}{\partial y},\ v_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Presupunem aici că densitatea fluidului este constantă și componentele vitezei nu depind de timp. Introducînd expresiile vitezei în ecuația de continuitate, obținem :

$$\rho\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 0,$$

sau :

$$\Delta V = 0, \qquad \text{(I, 17)}$$

unde Δ înseamnă operatorul lui Laplace introdus anterior $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Ecuația (I, 17) se numește *ecuația lui Laplace*. În cele ce urmează, atunci cînd vom scrie sistemul complet de ecuații ale mișcării unui fluid, vom verifica dacă orice funcție V, care satisface ecuația (I,17) descrie într-adevăr o anumită mișcare posibilă a fluidului. Astfel, pentru rezolvarea acestei probleme este suficient să putem găsi soluțiile necesare ale ecuației (I. 17).

§ 5. Ecuația căldurii

După cum se știe din cursurile de fizică, căldura este rezultatul mișcării haotice a particulelor materiale. Gradul de încălzire al unui corp se determină cu ajutorul temperaturii lui. Între energia mișcării termice și temperatură există relația simplă :

$$Q = \iiint_D c\rho T\,dv,$$

unde D este volumul ocupat de corp, Q este energia mișcării termice sau, ceea ce este unul și același lucru, cantitatea de căldură în calorii, ρ este densitatea materiei, T este temperatura absolută și c este căldura specifică.

Transmisia căldurii de la un corp la altul sau de la o porțiune a mediului la alta are loc pe căi diferite. Neluînd în considerare radiația, procesele chimice ș.a.m.d., vom cerceta aici numai transportul direct al căldurii prin transmisia energiei cinetice din particulă în particulă, datorită ciocnirilor.

Să ne închipuim pusă în evidență o porțiune a unei suprafețe netede S, care se găsește în interiorul mediului de studiat și fie $\vec{n}$ versorul normalei la S. Energia termică a mișcării particulelor, care se află de ambele părți ale acestei porțiuni, poate varia, cu timpul, datorită ciocnirilor lor între ele, sau datorită trecerii particulelor prin suprafață.

Particula al cărei centru de greutate se găsea de o parte a suprafeței și care avea acolo o anumită energie, poate ceda această energie, fie trecînd de cealaltă parte a suprafeței, fie prin ciocnire cu o particulă al cărei centru de greutate se găsea de cealaltă parte a suprafeței. Să notăm cu $\Delta_s Q$ cantitatea de energie transmisă în unitatea de timp prin suprafața S, particulelor care se găsesc de aceeași parte a suprafeței cu versorul normalei de către particulele care se găsesc de cealaltă parte a suprafeței S.

Să presupunem că mărimea $\Delta_s Q$ poate fi reprezentată sub forma

$$\Delta_s Q = \iint_S \chi(S, t)\, ds,$$

unde

$$\chi(S, t) = f(x, y, z; \vec{n}; t).$$

Aceste formule sînt echivalente cu ipoteza că cantitatea de energie termică, ce trece printr-o suprafață elementară, depinde numai de poziția centrului suprafeței și de normala la ea. Vom presupune de asemenea că f, ρ, c și T sînt funcții continuu derivabile de argumentele lor.

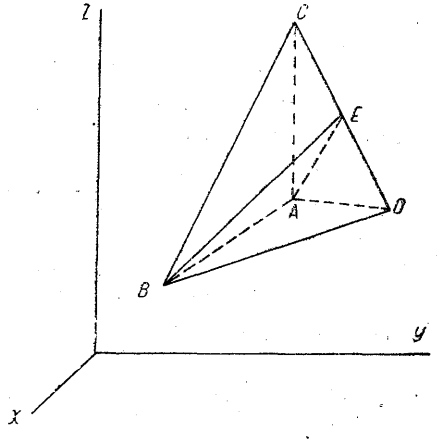

Fig. 3

Studiind propagarea căldurii într-un corp oarecare, vom presupune pentru generalitate că în interiorul acestui corp sînt repartizate în mod continuu surse de căldură cu intensitatea $q(x, y, z, t)$. Scriind bilanțul căldurii pentru volumul D, obținem

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_D c\rho\, T dv = \iiint_D \frac{\partial (c\rho T)}{\partial t}\, dv =$$

$$= -\iint_S f(x, y, z; \vec{n}; t)\, dS + \iiint_D q\, dv, \qquad (I, 18)$$

unde versorul $\vec{n}$ este orientat după normala exterioară.

Volumul D este cu totul arbitrar. Să aplicăm această formulă luînd ca volum D tetraedrul Ω, care are unul din vîrfurile sale în punctul x_0, y_0, z_0, trei din fețele sale fiind paralele cu planele de coordonate (fig. 3).

Să notăm fețele acestui tetraedru perpendiculare respectiv pe axele x, y, z, cu S_x, S_y, S_z, iar fața înclinată cu S. Să notăm

aria feței S cu σ, iar ariile celorlalte fețe respectiv cu σ_x, σ_y, σ_z. Pentru σ_x, σ_y și σ_z, obținem:

$$\sigma_x = \sigma \cos(nx),\ \sigma_y = \sigma \cos(ny),\ \sigma_z = \sigma \cos(nz),$$

unde $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ sînt cosinusurile directoare ale normalei exterioare la fața S.

Să aplicăm formula (I, 18) tetraedrului Ω. Vom obține

$$\iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T)\, dv - \iiint_\Omega q\, dv =$$

$$= \iint_{S_x} f(x, y, z; \vec{i}; t)\, d\sigma_x + \iint_{S_y} f(x, y, z; \vec{j}; t)\, d\sigma_y +$$

$$+ \iint_{S_z} f(x, y, z; \vec{k}; t)\, d\sigma_z + \iint_S f(x, y, z; -\vec{n}; t)\, d\sigma,$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, sînt versorii paraleli cu axele de coordonate x, y, z. Dacă volumul lui Ω este ω, atunci teorema mediei ne dă:

$$\omega \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T)|_{med} = \sigma_x v_x|_{med} + \sigma_y v_y|_{med} + \sigma_z v_z|_{med} + \sigma f(x, y, z; -\vec{n}; t)|_{med},$$

unde am pus în scopul de a scurta notația

$$v_x = f(x, y, z; \vec{i}; t),\ v_y = f(x, y, z; \vec{j}; t),\ v_z = f(x, y, z; \vec{k}; t)$$

Prin semnul $|_{med}$ am notat o valoare medie a funcției [1]). Să împărțim ambii membri prin σ și să trecem la limită pentru $\sigma \to 0$, considerînd direcția $\vec{n}$ constantă. Limita membrului stîng va fi, evident, egală cu zero. Luînd în considerație că

$$f(x, y, z; -\vec{n}; t) = -f(x, y, z; \vec{n}; t),$$

obținem

$$f(x_0, y_0, z_0; \vec{n}; t) =$$

$$= [v_x \cos(nx) + v_y \cos(ny) + v_z \cos(nz)]|_{x_0, y_0, z_0} = v_n|_{x_0, y_0, z_0}.$$

[1]) În sensul valorii funcției calculată într-unul din punctele din Ω conform cu teorema mediei (N. Red. E.T.).

Vedem astfel că funcția $f(x, y, z; \vec{n}; t)$ reprezintă proiecția unui vector oarecare $\vec{v}$ după direcția lui $\vec{n}$. Avem

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T)\, dv = -\iint_S v_n dS + \iiint_D q\, dv$$

oricare ar fi volumul D.

Vectorul $\vec{v}$ se va numi *flux de căldură*. El este analog vectorului viteză din scurgerea fluidelor.

Fluxul de căldură printr-un mediu este legat de distribuția temperaturii. În condițiile naturale, căldura trece totdeauna de la părțile cu o temperatură mai ridicată către acele părți a căror temperatură este mai coborîtă. Să punem în evidență în mediul nostru o suprafață mică dS și să cercetăm cum variază temperatura în punctele vecine acelei suprafețe.

Creșterea temperaturii este caracterizată prin mărimea

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \vec{n}\,\text{grad}\, T.$$

Să admitem că mediul nostru este izotrop, cu alte cuvinte proprietățile sale sînt aceleași în toate direcțiile. Este natural să presupunem că, dacă temperatura crește în direcția normalei, fluxul căldurii prin suprafața S este negativ. Cu alte cuvinte, mărimile

$$\vec{n}\,\text{grad}\, T = \text{grad}_n T \text{ și } v_n\, dS$$

trebuie să aibă semne contrarii. Acest lucru trebuie să fie adevărat oricare ar fi direcția lui $\vec{n}$. Prin urmare, proiecțiile vectorilor grad T și $\vec{v}$, pe o direcție oarecare, trebuie să fie opuse ca semn, ceea ce este posibil numai cu condiția ca acești vectori să fie direct opuși. Înseamnă

$$\vec{v} = -k\,\text{grad}\, T,$$

unde k este o mărime scalară pozitivă, care poate depinde de proprietățile mediului, de temperatură și de derivatele ei, și de alți factori. În primă aproximație putem considera k, funcție numai de punctul mediului. Această ipoteză este confirmată de experiență.

Introducînd expresia obținută pentru $\vec{v}$ în ultima formulă pentru bilanțul căldurii, obținem:

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T)\, dV = \iint_S k \frac{\partial T}{\partial n}\, dS + \iiint_D q\, dv.$$

Aplicînd lema din primul paragraf, obținem:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q. \quad \text{(I. 19)}$$

Presupunînd că ρ, c și k sînt constante, obținem

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + q_1, \quad \text{(I, 20)}$$

unde

$$a^2 = \frac{k}{\rho c} = \text{const.}, \quad q_1 = \frac{q}{\rho c}.$$

Ecuațiile (I, 19) sau (I, 20) poartă denumirea de *ecuația transmisiei căldurii* sau *ecuația căldurii*.

§ 6. Unde acustice

Ca ultim exemplu, să considerăm ecuația de propagare a sunetului.

Să presupunem că un lichid sau un gaz compresibil oarecare se mișcă cu viteza $\vec{v}$, ale cărei proiecții pe axele de coordonate le notăm cu

$$v_x(t, x, y, z),\ v_y(t, x, y, z),\ v_z(t, x, y, z).$$

Traiectoria fiecărui punct material al acestui fluid va fi determinată de ecuațiile:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \frac{dy}{dt} = v_y, \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Este ușor să calculăm acceleraţia. Vom avea

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \\
&= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}, \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I, 21)}$$

Să scriem ecuaţia mişcării fluidului, care se găseşte sub acţiunea forţei $\vec{F}$ (avînd proiecţiile X, Y, Z) aplicată în fiecare punct. Dacă presiunea în fiecare punct va fi $p(t, x, y, z)$, atunci asupra unei anumite suprafeţe S, care mărgineşte volumul Ω, va acţiona o forţă a cărei proiecţie pe axa x, este

$$\iint_S p(t, x, y, z)\cos(nx)\, dS.$$

Adăugînd acesteia proiecţiile pe aceeaşi axă a forţelor spaţiale şi a forţelor de inerţie, obţinem

$$\iint_S p\cos(nx)\, dS + \iiint_\Omega X\, dv -$$

$$-\iiint_\Omega \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) dv = 0,$$

unde dv este elementul de volum.

În baza lemei 1, ecuaţia mişcării va fi

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} - X = 0. \quad \text{(I, 22)}$$

Analog, se scriu celelalte două ecuaţii pentru componentele pe axele y şi z

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} - Y = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} - Z = 0.$$

Cele trei ecuaţii scrise mai sus, conţin cinci funcţii necunoscute: v_x, v_y, v_z, p şi ρ. Pentru ca sistemul să fie determinat, este necesar să adăugăm încă două ecuaţii. Una din aceste ecuaţii, care leagă aceste mărimi, a fost dedusă: ea este ecuaţia de continuitate.

În cazul general, va fi necesar să căutăm încă o ecuaţie. Presupunînd însă lichidul incompresibil şi omogen, vom putea pune

$$\rho = \text{const}$$

şi obţinem deodată numărul suficient de ecuaţii.

Putem verifica acum că soluţia problemei mişcării potenţiale a lichidului incompresibil, obţinută mai sus:

$$\vec{v} = \text{grad}\ V,$$

$$\Delta V = 0,$$

satisface într-adevăr sistemul complet de ecuaţii de mişcare a fluidului, dacă determinăm funcţia în mod corespunzător şi dacă în afară de aceasta:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

adică, dacă forţele exterioare derivă dintr-un potenţial. Este suficient să ne convigem că ecuaţiile (I, 22) ne permit să construim funcţia p, dacă considerăm

$$v_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Să introducem în ecuaţiile (I, 22), în locul lui v_x, v_y, v_z, valorile lor menţionate anterior. Obţinem, atunci, din aceste ecuaţii expresiile explicite pentru:

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Din teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întîi, se ştie că sistemul va fi compatibil în cazul cînd derivatele mixte de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial z}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y\partial z},$$

determinate din diferitele ecuații, sînt egale între ele. Propunem cititorului să facă această verificare.

În cazul general al lichidului compresibil, se știe din fizică, presiunea și densitatea fiecărui lichid sau gaz sînt legate între ele prin așa numita ecuație de stare, în care mai intră temperatura absolută T. Pentru un gaz ideal, această ecuație are forma :

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

unde R este așa numita *constantă a gazelor*. Această ecuație introduce încă o funcție necunoscută T. În anumite cazuri, mai trebuie să adăugăm ecuațiilor introduse o ecuație numită *ecuația aportului de căldură*.

Totuși, într-o serie de cazuri putem presupune că presiunea și densitatea sînt legate între ele printr-o relație funcțională directă

$$\rho = f(p), \qquad \text{(I, 23)}$$

unde f este o funcție dată.

Această împrejurare are loc, de exemplu, la cercetarea proceselor care decurg atît de repede încît căldura nu reușește să se transmită de la o particulă la alta. Asemenea procese se numesc *adiabatice*.

Pentru a obține din ecuațiile generale (I, 16), (I, 22) (I, 23) ecuațiile propagării sunetului, pe care le căutăm, vom face cîteva presupuneri simplificatoare. Vom considera că mișcarea gazului reprezintă mici oscilații în jurul poziției de echilibru. În această stare de echilibru, presiunea p_0 și densitatea ρ_0 sînt constante. Vom presupune că atît variațiile $p - p_0$ și $\rho - \rho_0$, cît și vitezele sînt mici și, în particular, vom considera că termenii de tipul $\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$, ș.a.m.d. din ecuațiile (I, 22), pot fi neglijați. Obținem :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = X, \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Cu aproximația unor expresii de forma $\frac{\partial \rho}{\partial t} v_x$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} v_y$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} v_z$, pe care le presupunem mici, aceste ecuații pot fi scrise sub forma :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial p}{\partial x} = X, \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) + \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) + \frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Derivînd aceste ecuații, respectiv în raport cu x, y și z, și adunîndu-le, obținem :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\operatorname{div}(\rho \vec{v})] + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \qquad \text{(I, 24)}$$

Membrul stîng al ecuației (I, 24) poate fi scris, în baza ecuației de continuitate, sub forma :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - f'((p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - f''(p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2.$$

În sfîrșit, considerînd $f'(p)$ constant pentru un interval mic de variație al lui p, $f'(p) = f'(p_0)$ și notînd membrul drept al lui (I, 24), adică $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ cu Φ, vom avea :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Phi, \qquad \text{(I, 25)}$$

unde a este o constantă definită prin formula :

$$\frac{1}{a} = \sqrt{f'(p_0)}.$$

Folosind notația simbolică, avem :

$$\Delta p - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Phi.$$

Putem obține ecuația de propagare a sunetului și pe altă cale, luînd, de exemplu, ca funcție necunoscută nu presiunea p ci densitatea ρ. Se arată că în acest caz obținem pentru ρ o ecuație cu derivate parțiale de aceeași formă ca și ecuația (I, 25).

Ecuațiile deduse de noi sînt destul de caracteristice. Am fi putut da încă multe alte exemple, totuși deducerea ecuațiilor fizicii matematice nu intră în cercetarea noastră, întrucît scopul nostru principal este cercetarea și rezolvarea unor asemenea ecuații.

De aceea, ne vom limita la exemplele arătate și vom trece la studiul diferitelor probleme pentru aceste ecuații.

LECȚIA a II-a

PUNEREA PROBLEMELOR FIZICH MATEMATICE. EXEMPLUL LUI HADAMARD

§ 1. Condiții inițiale și condiții la limită

Se știe din cursul de ecuații diferențiale ordinare, că soluția acestor ecuații nu este determinată în mod unic.

Soluția ecuației

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{(II, 1)}$$

depinde în general de n constante arbitrare:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n). \qquad \text{(II, 2)}$$

Putem lua adesea pentru aceste constante valorile inițiale ale funcției necunoscute și ale derivatelor sale

$$y|_{x=0} = y_0,\ y'|_{x=0} = y_0^{(1)},\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=0} = y_0^{(n-1)}. \qquad \text{(II, 3)}$$

Se spune că soluția de forma (II, 2) este generală atunci cînd putem satisface condițiile (II, 3) oricare ar fi $y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n-1)}$, alegînd valorile corespunzătoare pentru constantele $c_1, \ldots c_n$; pentru aceasta este necesar să se rezolve un anumit sistem de ecuații. În particular dacă ecuația (II, 1) este liniară și omogenă, integrala generală (II, 2) are forma foarte simplă

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

unde funcțiile $y_1, y_2 \ldots, y_n$, formează un sistem de soluții particulare liniar independente.

La fel, nu avem soluții unice nici pentru ecuațiile cu derivate parțiale. Soluția unei ecuații cu derivate parțiale depinde

în general de anumite funcții arbitrare. De exemplu, soluția generală a ecuației

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

cu două variabile independente x și y va fi

$$u = f(x),$$

unde $f(x)$ este o funcție cu totul arbitrară.

Pentru a face soluția bine determinată, este de obicei necesar să se dea anumite condiții suplimentare; de exemplu, este necesar să se ceară ca funcția necunoscută și uneori unele din derivatele sale sau anumite combinații ale funcției și derivatelor sale, să ia valori date pe diferite varietăți.

Este posibilă, în general, și problema determinării formei generale a soluțiilor pentru ecuația cu derivate parțiale, analog cu problema corespunzătoare pentru ecuația de forma (II, 1). Deși asemenea soluții generale există, cunoașterea lor, cu rare excepții, nu ne dă nimic pentru rezolvarea problemelor particulare importante, deoarece, în locul sistemului de ecuații finite pentru găsirea lui $c_1, c_2, \ldots, c_n$, așa cum se prezentau lucrurile pentru ecuațiile ordinare, obținem în rezolvarea acestor probleme particulare un sistem de relații funcționale atît de complicate pentru funcțiile arbitrare, încît găsirea lor este practic imposibilă.

Fiecare problemă din fizica matematică se pune ca o problemă de rezolvare a unei anumite ecuații, de exemplu (I, 9) (I, 14) (I, 17), sau (I, 19) cu condiții suplimentare bine determinate, care în majoritatea cazurilor sînt dictate de însăși problema fizică.

Să indicăm pe scurt care sînt problemele posibile pentru ecuațiile deduse de noi mai sus.

În problema vibrațiilor coardei este natural să considerăm, de exemplu, porțiunea de coardă $0 \leqslant x \leqslant l$ fixată la ambele extremități. Trebuie să căutăm prin urmare soluția ecuației (I, 9) care satisface condițiile

$$u|_{x=0} = 0 \text{ și } u|_{x=l} = 0. \qquad \text{(II, 4)}$$

Cînd extremitățile nu sînt fixate, ele fiind puse în mișcare după o anumită lege, condițiile (II, 4) se înlocuiesc cu condițiile

$$u|_{x=0} = f_1(t) \text{ și } u|_{x=l} = f_2(t). \qquad \text{(II, 5)}$$

Este posibil să dăm de asemenea şi alte condiţii la extremităţi. Nu vom analiza toate tipurile de probleme de acest fel.

Pentru rezolvarea problemei nu este suficient să cunoaştem modul în care se comportă coarda la extremităţile sale. Mai este necesar să cunoaştem, de exemplu, şi valoarea funcţiei u şi a vitezei $\frac{\partial u}{\partial t}$ la momentul iniţial, cu alte cuvinte

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{II,6}$$

Condiţiile (II, 5) şi (II, 6) determină amîndouă în întregime soluţia ecuaţiei (I, 9). Vom stabili în cele ce urmează că, în ipoteza unor funcţii f_1, f_2, φ_0, φ_1, destul de netede, o asemenea soluţie poate exista totdeauna şi că, prin urmare, printre aceste condiţii nu sînt condiţii de prisos.

Problema vibraţiilor membranei se pune în mod cu totul analog. Pentru a determina mişcarea sa, este suficient să se dea, de exemplu

$$\left.\begin{aligned} u\,|_{t=0} &= \varphi_0(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \varphi_1(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{II,7}$$

şi valoarea funcţiei u pe frontiera S,

$$u\,|_S = f(S, t), \tag{II, 8}$$

unde $f(S, t)$ depinde de punctul de pe suprafaţa S şi de timpul t.

În locul valorilor u pe frontieră se dă uneori combinaţia liniară:

$$\alpha u\Big|_S + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f(S, t). \tag{II, 9}$$

Condiţiile (II, 7) şi (II, 9) fac, aşa cum vom stabili în cele ce urmează, ca problema să fie complet determinată. Există totdeauna o soluţie care să le satisfacă şi de aceea, condiţiile (II, 7) şi (II, 9) nu conţin condiţii de prisos.

Pentru rezolvarea problemei referitoare la transmisia căldurii într-un corp oarecare [v. (I, 19)], este suficient să cunoaştem temperatura sa iniţială

$$T\,|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \tag{II, 10}$$

precum şi condiţiile pe suprafaţa corpului

$$\alpha T\Big|_S + \beta \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = f(S), \tag{II, 11}$$

unde $f(S)$ este o funcţie dată de un punct de pe suprafaţă.

În toate ecuaţiile cercetate — ecuaţia vibraţiilor membranei, ecuaţia coardei vibrante, ecuaţia căldurii — nu este de loc necesar să considerăm un corp mărginit. Putem considera alături de acesta şi o dreaptă, un plan, sau un spaţiu, care se întind la infinit; atunci condiţiile (II, 4), (II, 5), (II, 8), (II, 9) şi (II, 11), care de obicei se numesc *condiţii pe frontieră* sau *condiţii la limită*, cad. Problema fără asemenea condiţii poartă numele de *problema lui Cauchy*; condiţiile (II, 6), (II, 7) şi (II, 10) se numesc *condiţiile iniţiale* sau *datele lui Cauchy*.

Putem considera un corp în care, datorită acţiunii prelungite a diferitelor influenţe constante asupra frontierei sale, s-a stabilit o anumită temperatură constantă în fiecare punct din interiorul corpului, şi care temperatură variază, însă, de la un punct la altul.

În corp se formează astfel o stare termică staţionară. Din ecuaţia (I, 20), punînd $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, obţinem:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q}{\rho c}. \tag{II, 12}$$

Ecuaţia (II, 12) poate fi rezolvată cu condiţiile (II, 11). Un interes deosebit prezintă două cazuri foarte simple: cînd $\alpha = 0$, sau $\beta = 0$. Problema rezolvării ecuaţiei (II, 12) cu condiţia

$$T|_S = f(S)$$

se numeşte *problema lui Dirichlet*. Aceeaşi problemă poate fi pusă şi rezolvată şi pentru ecuaţia cu două variabile independente; ecuaţia (II, 12) se scrie atunci, astfel

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{q}{\rho c}. \tag{II, 14}$$

Cînd $q \equiv 0$, problema poate fi considerată în acelaşi timp şi ca o problemă de echilibru a membranei.

Într-adevăr, dacă punem în ecuaţia membranei $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ şi prin urmare $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, obţinem din nou o ecuaţie de forma (II, 14).

Cealaltă problemă referitoare la determinarea soluţiilor ecuaţiei (II, 12) cu condiţia

$$\frac{\partial T}{\partial n} = f(S) \qquad \text{(II, 15)}$$

se numeşte *problema lui Neumann*; ea poate fi considerată şi pentru două variabile independente. La aceeaşi problemă a lui Neumann ne conduce şi problema mişcării potenţiale staţionare a unui fluid incompresibil (I, 17). Dorind să găsim viteza fluidului din interiorul unui anumit domeniu, este natural să cunoaştem pe frontiera acestui domeniu mărimea componentei normale a vitezei v_n, care caracterizează fluxul fluidului prin fiecare punct al suprafeţei. Dacă, de exemplu, suprafaţa S este un perete impermeabil, trebuie să punem condiţia ca fluxul prin acest perete să fie nul. Însă, $v_n = \frac{\partial V}{\partial n}$, de unde se vede că problema pusă de noi se reduce la problema lui Neumann.

Pentru ecuaţia (II, 12) precum şi pentru cele precedente, nu este de loc obligatoriu să ne ocupăm numai de soluţia sa într-un domeniu finit. Foarte adesea, este important s-o rezolvăm pentru un domeniu infinit. Acest lucru se întîmplă, de exemplu, atunci cînd dimensiunile domeniului considerat sînt foarte mari în raport cu scara fenomenului studiat. Este firesc, de exemplu, ca în studiul fenomenului de transmisie a căldurii, pentru o conductă lungă îngropată în pămînt, să considerăm că pămîntul nu este o sferă, ci un semispaţiu infinit şi să rezolvăm ecuaţia (II, 12) într-un semispaţiu din care s-a extras un cilindru ş.a.m.d.

În studiul domeniilor infinite, nu este deloc indiferent cum se comportă soluţia în punctele îndepărtate ale domeniului studiat; în multe cazuri, problema devine determinată numai cu anumite ipoteze asupra acestei comportări. De exemplu, dacă rezolvăm ecuaţia (II, 12) în spaţiul infinit, din care s-a extras o sferă (adică dacă o rezolvăm pentru exteriorul acestei sfere) trebuie să impunem soluţiei restricţia suplimentară ca ea să se anuleze la infinit. Altfel soluţia rămîne nedeterminată.

Un rol important îl joacă încă o consideraţie suplimentară

§ 2. Noţiunea de problemă corect pusă. Exemplul lui Hadamard

Punerea problemelor fizicii matematice introduce, aşa cum am văzut, anumite funcţii, care intră în condiţiile iniţiale şi în condiţiile la limită, iar soluţia, în genere, depinde de aceste funcţii, care se determină, de obicei, din experienţă, şi de aceea nu pot fi găsite cu totul exact.

De aceea, este totdeauna inevitabilă o anumită eroare în condiţiile iniţiale sau în condiţiile la limită. Această eroare se resfrînge şi asupra soluţiei şi nu totdeauna eroarea din soluţie este mică.

Vom considera exemple foarte simple de probleme în care o mică eroare în datele problemei poate atrage după sine o eroare foarte mare în rezultate. Cercetînd ecuaţiile fizicii matematice, trebuie să examinăm totdeauna în mod deosebit problema dependenţei soluţiilor de condiţiile iniţiale şi de condiţiile la limită.

Să presupunem că o problemă de fizică matematică s-a redus la găsirea unei anumite funcţii $u(x, y, z, t)$ de patru variabile într-un domeniu oarecare de variaţie Ω_t a acestor variabile şi satisfăcînd în acest domeniu ecuaţia

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right) = 0 \qquad \text{(II. 16)}$$

În exemplele analizate mai sus, un asemenea domeniu a fost domeniul Ω al variabilelor independente x, y, z, şi intervalul arbitrar de timp $0 \leqslant t \leqslant T$.

Să presupunem soluţia căutată este supusă unor condiţii suplimentare de forma

$$\Psi_j\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^r u}{\partial t^r}\right)\Big|_{S_i} = \varphi_j(S_i), \qquad \text{(II, 17)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, l;$$

$$j = 1, 2, \ldots, p,$$

unde S_i este o varietate din spaţiul x, y, z, t, al cărui număr de dimensiuni este mai mic decît patru, iar $\varphi_j(S_i)$ este o funcţie dată pe varietatea S_i.

Aceste condiţii au fost puse de noi mai sus, de exemplu pe varietăţile $t = 0$ şi pe o suprafaţă S a spaţiului (x, y, z) pentru toate valorile lui t.

Să admitem că condițiile (II, 17) determină în Ω_t o soluție unică a problemei. Vom spune că în domeniul Ω_t soluția depinde în mod continuu de condițiile la limită sau de cele inițiale, dacă mici variații ale funcțiilor care se găsesc în aceste condiții atrag după sine variații mici în soluție. Dimpotrivă, vom spune că soluția depinde de aceste date în mod discontinuu, dacă mici variații ale funcțiunilor $\varphi_j(S_i)$, care figurează în aceste date, nu dau totdeauna variații mici ale soluției. Noțiunea de dependență continuă este în cazul de față mai complicată decît noțiunea de continuitate obișnuită a funcțiilor de mai multe variabile. Cuvintele „micile" variații ale soluției" sau „micile variații ale condițiilor inițiale" pot fi înțelese în mod diferit. Să explicăm cele spuse prin exemple.

Să introducem în membrul drept al lui (II, 17), în locul funcțiilor $\varphi_j(S_i)$, care presupunem că admit derivate continue pînă la un ordin k inclusiv, funcțiile noi

$$\varphi_j^*(S_i) = \varphi_j(S_i) + \varphi'_j(S_i), \qquad \text{(II, 18)}$$

avînd de asemenea k derivate continue.

Convenim să spunem că $\varphi_j^*(S_i)$ diferă de $\varphi_i(S_i)$ cu mai puțin de η pînă la ordinul k, dacă valorile absolute ale tuturor funcțiilor $\varphi_j(S_i)$ și ale derivatelor lor parțiale pînă la ordinul k, nu depășesc pe η. Noi avem în vedere că derivarea are loc în raport cu anumiți parametri de pe varietatea S_i.

Să presupunem acum că pentru asemenea funcții arbitrare $\varphi_j^*(S_i)$ problema considerată admite soluția

$$u^* = u + u', \qquad \text{(II, 19)}$$

unde u este soluția problemei corespunzătoare funcțiilor $\varphi_j(S_i)$ din membrii drepți ai lui (II, 17).

Se poate întîmpla ca funcția u^* să difere de u cu mai puțin decît ε pînă la ordinul p în întregul domeniu Ω_t, de îndată ce φ^* diferă de φ cu mai puțin decît $\eta(\varepsilon)$ pînă la un anumit ordin k bine determinat.

În acest caz, vom spune că soluția depinde continuu de condițiile suplimentare pînă la ordinul (p, k) în Ω_t.

Dimpotrivă, dacă putem găsi un ε_0, astfel încît, oricare ar fi η, să existe funcții $\varphi_j^*(S_i)$, care să difere de $\varphi_j(S_i)$ cu mai puțin decît η pînă la ordinul k și pentru care totuși u^* să difere de u cu mai multe decît ε_0 pînă al ordinul p, vom spune că această

soluție depinde de condițiile suplimentare în mod discontinuu de ordinul (p, k) în Ω_t.

Să dăm încă un exemplu de felul în care poate fi definită noțiunea de continuitate. Vom considera funcția u mică, dacă

$$\iiint_{\Omega_t} u'^2\, dx\, dy\, dz < \varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv suficient de mic, iar funcțiile φ_j le vom considera mici, dacă sînt mici și integralele

$$\iint \varphi_j'^2(S_i)\, dS_i.$$

Cu o asemenea interpretare a continuității, dependența lui u de φ_j trebuie considerată continuă, dacă inegalitatea

$$\iiint_{\Omega_t} u'^2\, dx\, dy\, dz < \varepsilon \qquad \text{(II, 20)}$$

este satisfăcută totdeauna de îndată ce

$$\iint_{S_i} \varphi_j'^2(S_i)\, dS_i < \eta(\varepsilon). \qquad \text{(II, 21)}$$

Dependența lui u de φ_j poate fi continuă într-unul din cele două sensuri fără a fi continuă în sensul celălalt; de aceea, vorbind despre continuitate, trebuie să specificăm în fiecare caz, despre care interpretare a ei este vorba.

În cazul cînd există un domeniu de variație Ω_t a variabilelor independente în care avem o soluție unică a problemei, care depinde în mod continuu de φ_j, vom spune că problema este *pusă corect*, în cazul contrar vom spune că problema *nu este pusă corect* în sensul definiției date pentru dependența continuă.

O b s e r v a ț i e. De obicei domeniul Ω_t este determinat chiar de problema pe care o studiem și de intervalul de valori ale parametrului t (timpul), pentru care se caută soluția. Variația domeniului Ω_t pentru problema dată poate avea loc numai datorită variației intervalului de valori amintit.

În problemele staționare, cu alte cuvinte în problemele în care atît ecuația cît și condițiile care determină soluția nu

depind de timpul t, de exemplu în problemele lui Dirichlet şi Neumann, domeniul Ω_t nu depinde nici el de timp, şi este complet determinat de însăşi punerea problemei.

După cum se ştie, pentru ecuaţiile diferenţiale ordinare, problema integrării ecuaţiei

$$\frac{d^m u}{dx^m} = f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right)$$

cu condiţiile iniţiale

$$u\Big|_{x=0} = u_0, \frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = u_1, \ldots, \frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\Big|_{x=0} = u_{m-2}$$

datorită restricţiilor impuse funcţiei f de teorema de existenţă şi unicitate, este totdeauna pusă corect.

Acelaşi lucru este adevărat şi pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul întîi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t, x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Problema lui Cauchy, adică problema rezolvării unei ecuaţii cu condiţii iniţiale date $u/_{t=0} = u_0(x, y, z)$ este pusă corect pentru această ecuaţie, întrucît u depinde de u_0 continuu, pînă la ordinul (1,1).

Această împrejurare nu va avea loc totdeauna pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de ordin superior; de aceea, nu are sens totdeauna să punem pentru ele aceeaşi problemă a lui Cauchy.

Să analizăm următorul exemplu aparţinînd lui Hadamard. Să găsim soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

în semiplanul $y > 0$ satisfăcînd condiţiile

$$u\Big|_{y=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = e^{-\sqrt{n}} \cos nx.$$

Nu este greu de văzut că această soluţie va avea forma

$$u = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \operatorname{sh} ny. \qquad \text{(II, 22)}$$

Putem demonstra că soluţia problemei propuse este unică. Este uşor de văzut că atunci cînd n tinde către infinit, funcţia $e^{-\sqrt{n}} \cos nx$, tinde uniform către zero, nu numai ea, ci şi toate

derivatele sale. Totuşi soluţia (II,22) are, oricare ar fi y, diferit de zero, forma unei cosinusoide, avînd amplitudinea oricît de mare şi, se înţelege, nu tinde către nici o limită. Pentru $x = 0$ aceasta creşte nemărginit împreună cu n.

Este clar că nu poate fi vorba aici despre o dependenţă continuă a soluţiei de condiţiile iniţiale, în nici un domeniu limitat de axa $y = 0$ şi problema nu este pusă corect în sensul definiţiilor continuităţii enumerate mai sus, pentru nici una din aceste definiţii.

Dacă considerăm problema dependenţei continue într-un domeniu infinit, această chestiune încetează de a fi aşa de simplă chiar pentru ecuaţiile diferenţiale ordinare. Dependenţa continuă de condiţiile iniţiale poartă în acest caz denumirea de „stabilitate după Liapunov".

Problemele analoge din teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale pot fi numite în mod firesc *teoria stabilităţii*. Aceste chestiuni sînt deocamdată puţin studiate şi dificile pentru un curs elementar, astfel încît nu ne vom ocupa de ele.

Rezolvarea unei probleme puse necorect nu are în majoritatea cazurilor nici o valoare practică.

Cercetînd soluţia tuturor problemelor, care sînt cuprinse în acest curs, ne vom opri de fiecare dată asupra punerii lor corecte. În lecţiile care urmează ne vom ocupa mai amănunţit de studiul deosebirilor dintre ecuaţiile pe care le-am considerat pînă acum.

LECȚIA a III-a

CLASIFICAREA ECUAȚIILOR LINIARE DE ORDINUL AL DOILEA

§ 1. Ecuațiile liniare și formele pătratice. Forma canonică a ecuației

Toate ecuațiile considerate de noi pînă acum, au fost ecuații liniare de ordinul al doilea cu coeficienți reali, adică ecuații de forma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \qquad \text{(III, 1)}$$

unde A_{ij}, B_i, C și F reprezintă funcții date de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pentru a studia mai amănunțit proprietățile acestor ecuații, ne vom ocupa cu cercetarea unor proprietăți a acestor coeficienți. Să considerăm înainte de toate care este legea după care se transformă coeficienții ecuației (III, 1) printr-o transformare arbitrară a variabilelor independente, sau, ceea ce este același lucru, printr-o transformare geometrică a spațiului.

Să introducem în locul lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$, noile variabile

$$y_1 y_2, \ldots, y_n.$$

Vom presupune că funcțiile $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)$ au derivate de ordinul al doilea continue.

Atunci,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}; \qquad \text{(III, 2)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad \text{(III, 3)}$$

Introducînd expresiile (III, 2) și (III, 3) în ecuația (III, 1) obținem

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right) + Cu = F. \qquad \text{(III, 4)}$$

Dacă notăm cu $\bar{A}_{kl}$ noii coeficienți ai derivatelor $\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}$ de ordinul al doilea din ecuația (III, 4), este evident

$$\bar{A}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}. \qquad \text{(III, 5)}$$

Să ne fixăm asupra unui punct al spațiului și să presupunem că în acest punct

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \alpha_{ki}. \qquad \text{(III, 6)}$$

Formulele de transformare

$$\bar{A}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{lj} \qquad \text{(III, 7)}$$

coincid cu formulele de transformare ale coeficienților formei pătratice

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} p_i p_j, \qquad \text{(III, 8)}$$

pentru schimbarea de variabile

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} q_k, \qquad \text{(III, 9)}$$

care o transformă în forma

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{A}_{kl} q_k q_l. \qquad \text{(III, 10)}$$

Pentru ca formulele (III, 9) să dea o transformare de variabile biunivocă, este necesar, se înțelege, să cerem ca determinantul $|\alpha_{ki}|$ să fie diferit de zero.

Dacă dorim ca schimbarea de variabile să ne ajute întrucîtva la simplificarea ecuației (III, 1), putem considera în locul acestei probleme o alta : problema simplificării aspectului formei pătratice (III, 8) cu ajutorul schimbării de variabile (III, 9) cu coeficienți reali α_{ki}.

O asemenea problemă se întîlnește în cursurile de geometrie analitică la reducerea ecuației suprafețelor de ordinul al doilea. Aici, această problemă va fi mai simplă, deoarece nu sîntem legați de ortogonalitatea transformărilor și nu este necesar să cerem ca în spațiul $p_1, p_2, \ldots, p_n$ direcțiile axelor $q_1, q_2, \ldots q_n$ să fie ortogonale.

În cursul de algebră liniară se arată că putem alege totdeauna coeficienții transformării astfel încît forma pătratică (III, 8) să devină

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,p_i\,p_j = \sum_{l=1}^{n} k_l\,q_l^2\,, \qquad \text{(III, 11)}$$

unde k_l, sînt anumite numere pozitive sau negative.

Este valabilă următoarea

T e o r e m a 1. (Legea inerției formelor pătratice). *Oricare ar fi metoda cu ajutorul căreia am reduce forma pătratică* (III, 8) *la forma* (III, 11) *cu variabilele liniar independente* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *numărul coeficienților pozitivi, precum și numărul coeficienților negativi, din totalitatea coeficienților* $k_1, k_2, \ldots, k_n$, *rămîne totdeauna același.*

De aici, urmează, între altele, că numărul coeficienților k_n diferiți de zero, este de asemenea același, oricare ar fi reprezentările (III, 11).

Această teoremă se demonstrează de asemenea în cursurile de algebră liniară, noi, însă, vom reproduce aici o demonstrație a ei.

Reducînd forma noastră cu ajutorul a două metode la o sumă de pătrate, obținem egalitatea

$$\sum_{l=1}^{n} k_l\,q_l^2 = \sum_{s=1}^{n} \rho_s m_s^2\,, \qquad \text{(III, 12)}$$

unde m_s și q_l sînt în ambele cazuri anumite coordonate în spațiu, legate între ele prin relațiile liniare

$$m_s = \sum_{l=1}^{n} \beta_{sl} q_l\,.$$

Să presupunem că numărul coeficienților pozitivi k_l este mai mare decît numărul coeficienților pozitivi ρ_s. Să egalăm cu zero pe toți acei q_2 ai căror coeficienți nu sînt pozitivi (ci negativi sau nuli) în forma pătratică. Dacă considerăm

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_r > 0 \geqslant k_{r+1} \geqslant k_{r+2} \geqslant \ldots \geqslant k_n,$$

vom presupune

$$q_{r+1} = q_{r+2} = \ldots = q_n = 0.$$

Să egalăm acum cu zero toți acei m_s pentru care coeficienții pătratelor din membrul drept al relației (III, 12) sînt pozitivi. Obținem, astfel, un sistem de ecuații pentru determinarea lui $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Datorită faptului că numărul acestor ecuații este mai mic decît numărul necunoscutelor, putem găsi totdeauna o soluție a acestui sistem în care nu toți $q_1, q_2, \ldots, q_r$, sînt nuli. Introducînd aceste valori $q_1, q_2, \ldots, q_r$, în ecuația (III, 12), vedem că membrul ei stîng va fi pozitiv, în timp ce membrul drept va fi nepozitiv, prin urmare, egalitatea (III, 12) nu va avea loc, și presupunerea noastră nu este adevărată.

Teorema este demonstrată.

Această teoremă ne permite să obținem o clasificare a ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea.

În fiecare punct al spațiului variabilelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ putem face o astfel de schimbare de variabile independente p_i încît în acest punct, forma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,p_i\,p_j$$

să se transforme într-o sumă de pătrate cu anumiți coeficienți.

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\,r_i^2\,.$$

Mai departe, substituția simplă

$$q_i = \sqrt{|k_i|}\,r_i$$

transformă forma noastră în expresia

$$\sum_{i=1}^{r} q_i^2 - \sum_{i=r+1}^{m} q_i^2 , \qquad \text{(III,13)}$$

unde r este numărul coeficienților pozitivi k_i, iar m este numărul total de coeficienți diferiți de zero.

Să presupunem acum că substituția (III, 9) care aduce forma fundamentală (III, 8) la forma (III, 13) a fost găsită și că aceasta se scrie cu ajutorul formulelor

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} \overset{\star}{\alpha}_{ik} q_k .$$

să introducem în spațiul nostru o schimbare liniară a variabilelor independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu ajutorul formulelor

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \overset{\star}{\alpha}_{ki} x_i .$$

În formula (III, 6) $\alpha_{ki} = \overset{\star}{\alpha}_{ki}$ și, prin urmare, în punctul considerat al spațiului, toți A_{ki} vor fi nuli pentru $i \neq k$ iar A_{ii} vor fi, fie ± 1, fie nuli. Ansamblul termenilor ecuației, care conțin derivate de ordinul al doilea, capătă forma

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} .$$

Dacă ecuația (III, 1) are coeficienți constanți, schimbarea liniară de variabile o transformă din nou într-o ecuație cu coeficienți constanți. În acest caz, vom putea aduce în întreg spațiul ecuația la o astfel de formă încît în noile coordonate, toți coeficienții derivatelor mixte de ordinul al doilea să fie nuli, iar coeficienții tuturor derivatelor $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, care nu se anulează, să fie egali cu ± 1. Această formă o vom numi forma *canonică*. Așa cum vom vedea în cele ce urmează, caracterul ecuației de ordinul al doilea este determinat în întregime de numărul r al coeficienților pozitivi și de numărul s al coeficienților negativi care apar după o asemenea transformare. Dacă vom analiza o ecuație cu coeficienți variabili, o asemenea reducere la forma canonică nu este posibilă dintr-o dată în întreg spațiul, și vom fi siliți să ne

limităm la reducerea la forma canonică separat, în fiecare punct al spațiului. În felul acesta, este posibil să obținem în diferitele puncte, diferite valori pentru numerele r și s. Este comod de a împărți spațiul în regiuni în care r și s sînt constanți și să cercetăm ecuația separat în fiecare din aceste regiuni în parte.

Să vedem acum ce se înțelege prin tipul unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea. În domeniul în care r și s păstrează valori constante, vom spune că ecuația aparține tipului (r,s) ; este evident că tipurile (r, s) și (s, r) coincid în esență, deoarece schimbarea semnelor la toți coeficienții schimbă rolurile lui r și s. Ecuația coardei vibrante este de tipul (1,1) pentru $n = 2$. Ecuația vibrațiilor membranei este de tipul (2,1) pentru $n = 3$. Ecuația căldurii este de tipul (3,0) pentru $n = 4$, ecuația lui Laplace este de tipul (3,0) pentru $n = 3$.

Vom numi tipul $(n,0)$ *tipul eliptic*, tipul (r, s), în care $r+s=n$, $s > 0, r > 0$, *hiperbolic*. Tipul $(n-1,1)$ se va numi *normal-hiperbolic*. Tipurile (r, s) în care $r + s < n$, se vor numi *parabolice*.

Numim *normal-parabolic*, tipul $(n-1,0)$. Tipurile parabolice, în care $s = 0$, se vor numi *eliptic-parabolice*, iar tipurile în care $r > 0$ și $s > 0$, *hiperbolic-parabolice*.

Ecuația coardei vibrante (I, 9) și ecuația vibrațiilor membranei (I, 13) aparțin evident tipului normal-hiperbolic, ecuația căldurii (I, 19), tipului normal-parabolic iar ecuația lui Laplace, tipului eliptic.

În cursul nostru, ne vom limita numai la studiul tipurilor normal-hiperbolice, normal-parabolice și eliptice. Toate ecuațiile considerate de noi în lecția I, aveau forma canonică și făceau parte chiar din acele tipuri. Vedem, astfel, că aceste ecuații nu pot fi transformate una în alta prin transformări reale de coordonate și că fiecare din ele este într-un anumit fel tipică.

Observație. Sistemul de coordonate în care ecuația ia forma canonică nu este unic.

Ecuația lui Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ rămîne invariantă pentru orice translație a originii sistemului de coordonate și pentru orice transformare ortogonală de coordonate.

Într-adevăr, coeficienții A_{kl}, vor avea după o astfel de rotație forma

$$\overline{A}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{il} ,$$

unde

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \cos(y_k, x_i).$$

și întrucît în baza condițiilor de ortogonalitate

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\,\alpha_{il} = \begin{cases} 1\ (k = l), \\ 0\ (k \neq l), \end{cases} \quad \text{atunci} \quad \overline{A}_{kl} = \begin{cases} 1\ (k = l), \\ 0\ (k \neq l), \end{cases}$$

ceea ce trebuia demonstrat. Transformările de variabile independente, care lasă ecuația undelor invariantă, poartă numele de *transformările lui Lorentz*. Aceste transformări joacă un rol important în teoria relativității.

§ 2. Forma canonică a ecuațiilor cu două variabile independente

După cum am văzut, o ecuație cu coeficienți variabili poate fi redusă totdeauna la forma canonică într-un anumit punct al spațiului. Dacă numărul variabilelor independente este mai mare decît doi, reducerea ecuației la forma canonică, în întreg domeniul de definiție al ecuației, poate fi făcută numai în cazuri excepționale. Însă ecuația cu două variabile independente poate fi redusă totdeauna la forma canonică în întregul domeniu de variație al variabilelor independente. Să analizăm mai amănunțit această chestiune. În cazul a două variabile, suma termenilor care conțin derivatele de ordinul al doilea poate fi scrisă sub forma

$$Lu \equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Vom numi această sumă *termenul principal* al operatorului de ordinul al doilea.

După trecerea la noile variabile $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, operatorul Lu capătă forma

$$Lu = \left[A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} +$$

$$+ 2\left[A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} +$$

$$+ \left[A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi}L\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}L\eta =$$

$$= L_1 u + \frac{\partial u}{\partial \xi}L\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}L\eta.$$

Am notat aci cu L_{1u} termenul principal al operatorului în noile variabile. Pentru ca ecuația să aibă după transformarea de coordonate forma canonică, este necesar în primul rînd să se anuleze coeficientul derivatei mixte

$$B_1 = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

și în al doilea rînd, să aibă loc egalitatea

$$A_1 = \pm C_1,$$

dacă ecuația este de tipul eliptic sau hiperbolic și $A_1 = 0$ sau $C_1 = 0$ dacă ecuația este de tipul parabolic.

Din cursul de geometrie analitică se știe că expresia canonică a formei

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2,$$

ai căror coeficienți se transformă ca și coeficienții operatorului Lu, este determinată de semnul discriminantului său:

$$\Delta = B^2 - AC,$$

și anume:

dacă $\Delta < 0$, forma este eliptică și se reduce la forma $r_1^2 + r_2^2$,

dacă $\Delta > 0$, forma este hiperbolică și se reduce la forma $r_1^2 - r_2^2$;

dacă $\Delta = 0$, forma este parabolică și se reduce la forma r_1^2.

În ultimul caz, am exclus posibilitatea degenerării complete a formei ($A = B = C = 0$). Să considerăm la început cazul parabolic. Dacă $\Delta = 0$, atunci $B^2 = AC$ și deci cel puțin unul din coeficienții A și C nu este nul. Fie $A \neq 0$. Să punem

$$k = \frac{B}{A} = \frac{C}{B}$$

(Dacă $B = 0$, atunci și $C = 0$ și deci ecuația are chiar forma canonică).

Avem

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + k\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2;$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + k\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2;$$

$$B_1 = A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\xi}{\alpha y}\frac{\partial\eta}{\partial y} =$$

$$= A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + k\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + k\frac{\partial\eta}{\partial y}\right).$$

Pentru ca ambii coeficienți B_1 și C_1 să se anuleze în același timp, este suficient să punem:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} + k\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \qquad \text{(III, 14)}$$

Ecuația (III, 14) este o ecuație de ordinul întîi pentru funcția necunoscută $\eta\ (x, y)$. Oricare din soluțiile acestei ecuații poate fi considerată ca o nouă variabilă independentă η. În noile variabile ξ, η termenul principal al ecuației capătă forma

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$$

Coeficientul A_1 nu se poate anula nicăieri, deoarece nici A nici $\frac{\partial\xi}{\partial x} + k\frac{\partial\xi}{\partial y}$ nu devin nuli. Într-adevăr, $A \neq 0$, conform ipotezei, iar expresia $\frac{\partial\xi}{\partial x} + k\frac{\partial\xi}{\partial y}$ ar putea să se anuleze numai în acele puncte în care liniile $\xi = \text{const.}$ și $\eta = \text{const.}$ sînt paralele, iar asemenea puncte nu pot să existe [1]). Împărțind ecuația, prin A_1, aducem termenul principal la forma $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$. Este util să observăm că ecuația (III, 14) definește numai familia de linii $\eta = \text{const.}$, lăsînd într-o oarecare măsură arbitrară alegerea funcției $\xi(x, y)$ [2]).

În cazul în care ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea este de tipul eliptic sau hiperbolic, putem obține ușor anularea coeficientului B_1. Reducerea completă la forma canonică a ecuațiilor de tip eliptic, este o problemă complicată, asupra căreia nu ne vom opri. Ecuația de tip hiperbolic, așa cum vom arăta imediat, poate fi totdeauna ușor redusă la forma canonică.

[1]) Transformarea $\xi = \xi(x, y)$; $\eta = \eta(x, y)$ este presupusă regulată de clasa $C^r (r \geqslant 2)$ deci, în particular, nesingulară în orice punct al domeniului de existență. (N. Red. E.T.).

[2]) Cu condiția menționată de regularitate a transformării de coordonate (N. Red. E.T.)

Să analizăm mai întîi cazul cînd ecuația liniară de ordinul al doilea cu două variabile independente nu este de tipul parabolic, iar coeficientul A nu se anulează (cazul $C \neq 0$, $A = 0$, se studiază în mod analog; cazul $A = C = 0$, se va considera separat). Astfel, fie $A \neq 0$. Să punem

$$\xi = x,\ \eta = \varphi(x, y).$$

Atunci $\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial\xi}{\partial x} = 1$, iar condiția pentru ca B_1 să se anuleze ia forma

$$A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \qquad \text{(III, 15)}$$

Luînd din nou pentru η una oricare din soluțiile ecuației (III, 15), obținem un sistem de coordonate în care ecuația are forma cerută.

Această formă nu va fi canonică deoarece, în genere, în această expresie coeficienții derivatelor de ordinul al doilea, nu sînt egali cu unitatea pozitivă sau negativă.

Dacă $A = C = 0$, ecuația are termenul principal de forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

și este hiperbolică. Este ușor de văzut că în acest caz, ea se reduce cu ajutorul substituției

$$\xi = x + y,\ \eta = x - y$$

la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \ldots$$

De aici, se vede că reducerea ecuației de tip hiperbolic la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \ldots$$

ar rezolva complet problema noastră. Înafară de aceasta, în multe chestiuni, chiar această formă este cea mai comodă și de aceea îi vom consacra un paragraf special.

§ 3. A doua formă canonlcă a ecuațiilor hiperbolice cu două variabile independente

Numim a doua formă canonică a ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic și cu două variabile independente, forma ecuației care nu conține derivatele $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ și $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Din formulele paragrafului precedent, rezultă că, pentru reducerea ecuației la această formă, trebuie să găsim funcțiile $\xi(x, y)$ și $\eta(x, y)$, care să satisfacă ecuațiile :

$$A_1 \equiv A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\ \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$C_1 \equiv A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\ \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Aceste ecuații coincid de fapt, de aceea trebuie să găsim două soluții independente ale aceleiași ecuații. Această ecuație poate fi scrisă sub forma :

$$A\left(\frac{\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial \chi}{\partial y}}\right)^2 + 2B\ \frac{\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial \chi}{\partial y}} + C = 0, \qquad \text{(III, 16)}$$

unde am notat cu χ una din funcțiile ξ, η, De-a lungul liniilor $\chi = \text{const.}$, avem :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial \chi}{\partial y}},$$

de aceea, ecuația (III,16) se transcrie sub forma :

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0.$$

Sub această formă ea reprezintă o ecuație de gradul al doilea în raport cu y'. Condiția $B^2 - AC > 0$ asigură existența a două rădăcini reale și distincte

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \\ y'_2 &= \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III,17)}$$

Considerînd curbele integrale ale primei și a celei de-a doua ecuații (III,17) respectiv ca linii $\xi = \text{const.}$ și $\eta = \text{const.}$, obținem soluția problemei noastre.

§ 4. Caracteristice

Introducerea variabilelor ξ și η, alese în mod corespunzător, ne-a permis să ne debarasăm în ecuațiile de tipul hiperbolic cu două variabile independente de termenii care conțin $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ și $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$.

În cazul general a n variabile, am putea alege coordonatele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, în așa fel încît în ecuație să nu intre, de exemplu, termenul care conține pe $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$. Am văzut că coeficientul acestei derivate se exprimă cu ajutorul formulei

$$\overline{A}_{11} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,\alpha_{1i}\,\alpha_{1j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}. \qquad \text{(III,18)}$$

Să considerăm suprafața :

$$y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

presupunînd că este valabilă inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\right)^2 > 0,$$

care ne asigură că nu avem puncte singulare pe suprafețele $y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$ Această condiție poate fi totdeauna satisfăcută, dacă suprafața $y_1 = 0$, este suficient de netedă, și dacă familia de suprafețe $y_1 = C$, pentru C variabil, umple o anumită porțiune a spațiului. Orice suprafață netedă, avînd ecuația $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, poate fi considerată ca suprafață $y_1 = 0$.

Să cercetăm condiția ca $\overline{A}_{11}$ să devină nul pe suprafața $y_1 = 0$. Din cursul de calcul diferențial sînt cunoscute formulele :

$$\cos(n x_i) = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial xi}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_k}\right)^2}}$$

unde $\cos(nx_i)$ reprezintă cosinusul unghiului dintre normala la suprafața $y_1 = 0$ și axa x_i. Ecuația $\overline{A}_{11} = 0$, se transcrie astfel sub forma :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos(nx_i) \cos(nx_j) = 0.$$

Această ecuație arată că anularea lui $\overline{A}_{11}$ pe suprafața $y_1 = 0$ este o proprietate individuală a acestei suprafețe, care nu depinde de loc de alegerea variabilelor $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

D e f i n i ț i e. *Suprafața*

$$y_1(x_1, x_2 \ldots, x_n) = c_0$$

se numește caracteristică a ecuației (III,1), *dacă la schimbarea variabilelor* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *în variabilele* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *unde* $y_2, \ldots, y_n$ *sînt funcții arbitrare de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *coeficientul* A_{11} *al lui* $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$ *se anulează pentru* $y_1 = c_0$.

Nu este greu să verificăm că ecuațiile de tip eliptic, nu au caracteristici reale, deoarece $\overline{A}_{11}$ reprezintă o formă pătratică pozitiv definită în raport cu α_{i_1} și nu se poate anula.

Dacă suprafața $x_1 = 0$ este o caracteristică, pentru ecuația

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F$$

cu alte cuvinte dacă $A_{11}|_{x_1=0} = 0$, această ecuație reprezintă o ecuație diferențială care leagă pe $u|_{x_1=0}$ și $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$. Într-adevăr, noi o putem transcrie pentru $x_1 = 0$ sub forma

$$2\sum_{i=2}^{n} A_{1i}\Big|_{x_1=0} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} A_{ij}\Big|_{x_1=0} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(u|_{x_1=0}) +$$

$$+ B_1|_{x_1=0}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}\right) + \sum_{i=2}^{n} B_i|_{x_1=0} \frac{\partial}{\partial x_i}(u|_{x_1=0}) +$$

$$+ C|_{x_1=0}(u|_{x_1=0}) = F|_{x_1=0}. \qquad \text{(III,19)}$$

Numim problema lui Cauchy pentru ecuația generală de ordinul al doilea, problema determinării soluției acestei ecuații, care satisface pe o anumită suprafață S *condițiile*

$$u\Big|_S = \varphi_0 ; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi_1.$$

Am văzut din exemplele de mai sus că sîntem conduși, în particular, la această problemă atunci cînd considerăm vibrațiile unei coarde sau ale unei membrane, dacă se dau la momentul inițial poziția și viteza particulelor corpului care vibrează.

Este util să observăm că, în genere, nu este absolut necesar să ne dăm derivata normală $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$. Într-adevăr, însăși definirea funcției necunoscute pe S ne permite să determinăm toate derivatele sale din planul tangent, iar cunoașterea derivatei normale ne permite să găsim valoarea gradientului funcției pe suprafața S. Am putea atinge același scop, dacă ne-ar fi fost cunoscută în fiecare punct al suprafeței derivata lui u după o direcție netangentă oarecare.

Din egalitatea (III,19) rezultă că, în cazul cînd suprafața $x_1 = 0$ este o caracteristică, $u/_{x_1=0}$ și $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$ nu sînt funcții independente de variabilele $x_2, x_3, \ldots, x_n$, iar probema lui Cauchy nu se poate pune pentru această suprafață $x_1 = 0$, deoarece dîndu-ne $u/_{x_1=0}$ arbitrar și $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$ ajungem la o contradicție cu ecuația (III, 19).

Considerațiile precedente ne arată că nu ne putem da arbitrar pe suprafețele caracteristice o funcție și o componentă a gradientului care să nu se găsească în planul tangent.

LECȚIA a IV-a

ECUAȚIA COARDEI VIBRANTE ȘI REZOLVAREA EI CU AJUTORUL METODEI LUI D'ALEMBERT

§ 1. Formula lui d'Alembert. Coarda infinită

Pentru a reduce la cea de-a doua formă canonică ecuația vibrațiilor libere ale coardei, cu alte cuvinte, pentru a reduce ecuația vibrațiilor coardei, cînd nu avem forțe transversale exterioare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{(IV,1)}$$

unde $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, vom pune

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - at, \\ \eta &= x + at. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV,2)}$$

Ecuația (IV,1) capătă atunci forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0. \qquad \text{(IV,3)}$$

Soluția ecuației (IV, III) se obține ușor sub forma generală; această soluție ne permite, contrar situației generale, despre care am vorbit în lecția a II-a, să găsim tot atît de ușor soluțiile diferitelor problemele concrete.

Din (IV,3), avem:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

de unde

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \psi'_2(\eta), \qquad \text{(IV,4)}$$

unde $\psi'_2(\eta)$. este o funcție arbitrară.

Din (IV,4) găsim

$$u = \psi_2(\eta) + \psi_1(\xi),$$

unde $\psi_1(\xi)$ este o funcție arbitrară. Revenind la variabilele x, t, obținem

$$u = \psi_1(x - at) + \psi_2(x + at). \qquad \text{(IV,5)}$$

Soluția obținută depinde de două funcții arbitrare ψ_1 și ψ_2. Ea poartă numele de *soluția lui d'Alembert.*

Pentru a rezolva diferitele probleme ale fizicii matematice, va trebui să determinăm în fiecare caz concret pe ψ_1 și ψ_2. Să considerăm înainte de toate problema lui Cauchy pentru coarda infinită, adică problema găsirii soluției, care satisface condițiile

$$\left.\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi_0(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \varphi_1(x). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV,6(}$$

Introducînd formula (IV,5) în (IV,6) vom avea

$$\begin{aligned} \psi_1(x) + \psi_2(x) &= \varphi_0(x), \\ -a\psi'_1(x) + a\psi'_2(x) &= \varphi_1(x), \end{aligned}$$

de unde

$$-a\psi_1(x) + a\psi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(x)\,dx + aC,$$

unde C este o constantă arbitrară, sau

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) - \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(x)\,dx - C\right],$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) + \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(x)\,dx + C\right].$$

Deci

$$u = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x - at) - \frac{1}{a}\int_0^{x-at} \varphi_1(y)\,dy - C + \varphi_0(x + at) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\int_0^{x+at} \varphi_1(y)\,dy + C\right],$$

și, în sfîrșit, obținem formula

$$u = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(y)\,dy\right]. \quad \text{(IV, 7)}$$

Este evident că soluția obținută satisface ecuația (IV,1) precum și condițiile inițiale. Modul în care a fost dedusă formula (IV,17) demonstrează unicitatea soluției problemei puse. Mai departe, este fără îndoială și faptul că problema a fost corect pusă. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem găsi un η astfel încît, înlocuind pe $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ cu $\varphi_0^{(1)}(x)$ și $\varphi_1^{(1)}(x)$, să avem

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0^{(1)}(x)| < \eta, \quad |\varphi_1(x) - \varphi_1^{(1)}(x)| < \eta,$$

diferența dintre noua soluție și cea inițială va fi în valoare absolută mai mică decît ε, oricare ar fi intervalul de timp finit. Astfel, soluția problemei depinde continuu de condițiile inițiale pînă la ordinul (0,0). Este util să urmărim mai amănunțit aspectul calitativ al vibrațiilor coardei infinite. Vom analiza cîteva cazuri mai simple.

C a z u l I. Funcția $\varphi_1(x)$ este identic nulă iar funcția $\varphi_0(x)$ este diferită de zero numai în intervalul finit $-k \leqslant x \leqslant k$.

Soluția (IV, 7) se exprimă atunci cu ajutorul formulei

$$u = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)\right];$$

termenul $\frac{1}{2}\varphi_0(x-at)$ reprezintă o perturbație constantă ca formă, care se deplasează cu viteza a, în direcția pozitivă a axei x. Aceasta este clar din faptul că plasînd originea sistemului mobil de coordonate ξ în punctul at, adică punînd $\xi = x - at$, vom vedea că perturbația este constantă. Analog, termenul $\frac{1}{2}\varphi_0(x+at)$ este o perturbație de aceeași formă, propagîndu-se în direcția opusă. Aceste perturbații se numesc *unde*. Prima este *unda directă*, iar cea de-a doua este *unda inversă*. La început, undele se suprapun una peste cealată, apoi se despart și în sfîrșit se depărtează din ce în ce mai mult în sensuri diferite.

După trecerea ambelor unde, în fiecare punct al coardei (iar pentru punctele care se găsesc înafara domeniului perturbației inițiale, după trecerea numai a uneia din ele) se restabilește

repausul. Schematic, forma coardei excitate este reprezentată în fig. 4.

C a z u l 2. Funcția $\varphi_0(x)$ este identic nulă, iar $\varphi_1(x)$ este diferită de zero numai în intervalul finit $-k \leqslant x \leqslant k$. În acest caz, se spune uneori că coarda nu are o perturbație inițială, ci numai un impuls inițial.

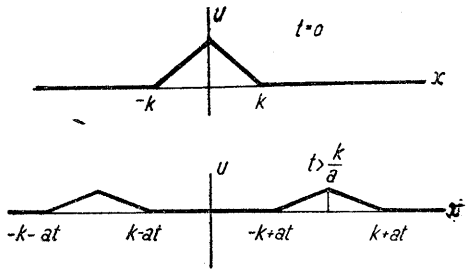

Fig. 4

Să considerăm funcția $\Phi(x)$, primitiva lui $\varphi_1(x)$, egală cu zero pentru valorile lui x din intervalul $-\infty < x \leqslant -k$. Pentru $x \geqslant k$ ea va fi egală cu o constantă, a cărei valoare este, în general, diferită de zero. Această constantă este evident

$$\int_{-k}^{k}\varphi_1(x)\,dx.$$

Formula (IV,7) ne dă

$$u = \frac{1}{2a}\left[\Phi(x+at) - \Phi(x-at)\right].$$

În acest caz, de-a lungul coardei, se propagă din nou două unde, una directă și una inversă. Aceste unde se vor deosebi una de alta numai prin semnele lor.

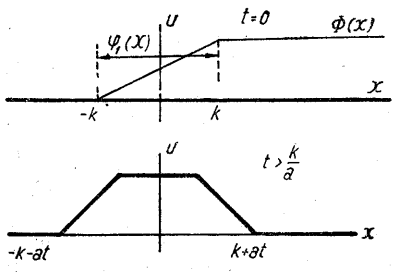

Fig. 5

În punctele în care au trecut ambele unde, atît cea directă cît și cea inversă, coarda ia o poziție de repaus, însă nu revine, în genere, la poziția inițială, întrucît $x + at > k$ și $\Phi(x+at)$ va fi constant, iar $x - at < k$ și $\Phi(x-at)$ este nul.

Coarda rămîne cu o așa numită *deplasare remanentă*. Forma deviației coardei este reprezentată în acest caz în fig. 5.

Ne putem convinge ușor de faptul că perturbația inițială și viteza inițială a coardei pot fi astfel date, încît să obținem o undă care să meargă numai într-o singură direcție. Pentru aceasta este necesar ca undele inverse, produse de perturbația inițială și de impulsul inițial, să difere una de alta numai prin semn.

§ 2. Coarda cu ambele extremități fixate

Vom considera acum o coardă avînd extremitățile fixate și vom căuta soluția cu condițiile (IV, 6) și condițiile

$$u|_{x=0} = 0 \text{ și } u|_{x=l} = 0.$$

Este evident că, în acest caz, funcțiile $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ vor fi definite în intervalul $0 \leqslant x \leqslant l$.

Întorcîndu-ne la formula (IV, 5), vedem că este necesar să determinăm pe $\psi_1(x)$ în intervalul de la $-\infty$ pînă la l, iar pe $\psi_2(x)$ în intervalul de la 0 pînă la $+\infty$. Introducînd în ecuația (IV, 5) $x = 0$ și $x = l$, obținem

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(-at) + \psi_2(at) &= 0, \\ \psi_1(l-at) + \psi_2(l+at) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV, 8)}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(-x) + \psi_2(x) &= 0, \quad 0 \leqslant x < \infty; \\ \psi_1(-x) + \psi_2(x+2l) &= 0, \quad -l \leqslant x < \infty. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV, 8')}$$

Orice pereche de funcții $\psi_1(x)$ și $\psi_2(x)$, satisfăcînd pe (IV, 8'), ne dă soluția problemei puse.

Prima din condițiile (IV, 8') ne permite să exprimăm funcția $\psi_2(x)$ pentru valorile pozitive ale argumentului prin valorile lui $\psi_1(x)$ pentru valorile negative ale argumentului. Introducînd valoarea funcției $\psi_2(x)$ definită din prima condiție, în cea de-a doua, obținem

$$\psi_1(-x) - \psi_1(-x-2l) = 0. \qquad \text{(IV,9)}$$

Această formulă ne spune că funcția $\psi_1(x)$ trebuie să fie periodică avînd perioada $2l$ în întregul domeniu în care ea ne interesează.

Considerînd sistemul (IV,8') ca un sistem de ecuații cu două funcții necunoscute, vedem că prima ecuație poate fi considerată ca o relație de definiție pentru $\psi_2(x)$. Este evident că

acest sistem este cu totul echivalent ecuației (IV,9), a cărei verificare asigură satisfacerea celei de-a doua ecuații din (IV,8'). Să formulăm rezultatul obținut.

Am demonstrat că fiecare soluție a ecuației (IV,1), cu condițiile (IV,8) se exprimă cu ajutorul unei funcții periodice arbitrare $\psi_1(x)$ cu perioada $2l$, definită în intervalul $-\infty < x \leqslant l$ conform formulei

$$u = \psi_1(x-at) - \psi_1(-x-at). \qquad \text{(IV,10)}$$

Fără a limita generalitatea, putem extinde pe $\psi_1(x)$ pe întreaga dreaptă $-\infty < x < +\infty$. Atunci formula (IV,10) ne dă pentru intervalul $-\infty < x < +\infty$ acea soluție a problemei vibrațiilor coardei infinite, care coincide în intervalul $0 \leqslant x \leqslant l$ cu cea căutată.

Punînd în (IV,10) $t = 0$, vedem

$$u|_{t=0} = \psi_1(x) - \psi_1(-x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -a\,[\psi_1'(x) - \psi_1'(-x)].$$

Însă, $\psi_1(x) - \psi_1(-x)$ este, după cum se poate vedea ușor, o funcție impară care, conform celor demonstrate, are perioada $2l$. O asemenea funcție poate fi ușor construită în întregime cu ajutorul valorilor sale pe segmentul $0 \leqslant x \leqslant l$, unde avem egalitatea

$$\psi_1(x) - \psi_1(-x) = \varphi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Analog, pornind de la egalitatea

$$-a\psi_1'(x) + a\psi_1'(-x) = \varphi_1(x) \text{ pentru } 0 \leqslant x \leqslant l,$$

construim ușor funcția $-a[\psi_1'(x) - \psi_1'(-x)]$ peste tot ca o funcție periodică impară. Acest lucru este echivalent cu prelungirea periodic a impară funcțiilor $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ pe întreaga dreaptă.

După ce funcțiile $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ au fost construite pe întreaga dreaptă, funcția $\psi_1(x)$ poate fi găsită fără dificultăți în același mod ca și în cazul coardei infinite.

De aici, rezultă că soluția problemei noastre poate fi exprimată cu ajutorul aceleiași formule (IV,7), dacă vom considera în ea $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ ca funcții periodice impare. Formula (IV, 7) ne dă într-adevăr soluția căutată, întrucît din faptul că, condițiile

inițiale sînt impare, urmează că $u|_{x=0} = 0$; punctul $x = l$ nu se deosebește cu nimic de punctul $x = 0$.

Este necesar să facem încă o observație importantă. Strict vorbind, funcția determinată de formula (IV,5) va satisface ecuația în cazul cînd $\psi_1(x)$ $\psi_2(x)$ sînt continue împreună cu derivatele lor pînă la ordinul al doilea.

Se pune întrebarea dacă și soluția obținută de noi are această proprietate.

Este clar că acest lucru poate fi garantat, dacă $\varphi_0(x)$ și $\varphi_1(x)$ vor satisface această condiție după prelungirea ei. Cititorii pot verifica singuri, că, pentru aceasta, este necesar să avem

$$\varphi_0(l) = \varphi_0''(l) = \varphi_0(0) = \varphi_0''(0) = 0,$$

$$\varphi_1(l) = \varphi_1''(l) = \varphi_1(0) = \varphi_1''(0) = 0.$$

Putem, totuși, considera și funcții, care să nu satisfacă toate aceste condiții. Va fi necesar să generalizăm atunci, în mod corespunzător, clasa soluțiilor ecuației (IV,1) considerate.

Această chestiune o vom analiza mai tîrziu.

§ 3. Rezolvarea problemei în cazul ecuației neomogene și pentru condiții la limită mai generale

Să considerăm acum o problemă mai generală. Să presupunem că trebuie să găsim soluția ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t) \qquad \text{(IV,11)}$$

cu condițiile

$$\left.\begin{aligned} \alpha u|_{x=0} + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= f_1(t), \\ \gamma u|_{x=l} + \delta \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV,12)}$$

și

$$\left.\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi_0(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \varphi_1(x). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV, 13)}$$

Observăm că soluția se caută în domeniul determinat de inegalitățile $0 < x < l$ și $0 < t$.

Să observăm înainte de toate că este ușor să construim o anumită soluție particulară a ecuației (IV, 11) care nu satisface este adevărat, condițiile (IV, 12) și (IV, 13).

Introducînd variabilele ξ și η, cu ajutorul formulelor

$$\xi = x - at,$$
$$\eta = x + at. \qquad \text{(IV,14)}$$

aducem ecuația (IV,11) la forma

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = Q(\xi, \eta). \qquad \text{(IV, 15)}$$

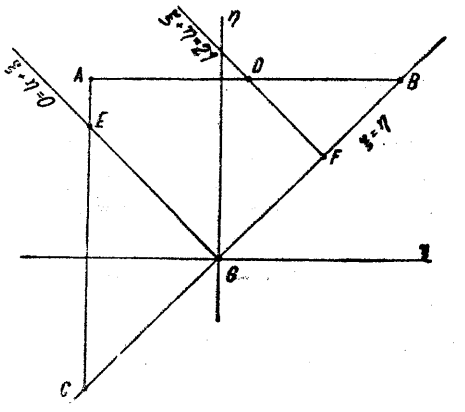

Fig. 6.

Domeniul de variație al variabilelor ξ și η va fi

$$\eta - \xi > 0, \qquad \text{(IV, 16)}$$

$$0 < \xi + \eta < 2l; \qquad \text{(IV,17)}$$

pe figură acesta apare ca o semifîșie (fig. 6). Să prelungim funcția $Q(\xi, \eta)$ cu totul arbitrar dincolo de dreptele

$$\xi + \eta = 0,$$
$$\xi + \eta = 2l,$$

definind-o în întreg semiplanul (IV, 16). Dacă vom găsi soluția ecuației (IV,15) în întregul semiplan, aceasta va satisface evident ecuația noastră în fîșia definită de inegalitățile (IV, 16) și (IV, 17). Vom căuta soluția particulară v_1 a ecuației (IV, 15). Punînd

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} = z(\xi, \eta), \qquad \text{(IV,18)}$$

obținem din (IV, 15)

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{4} Q(\xi, \eta); \qquad \text{(IV,19)}$$

soluția particulară (IV, 19) are forma

$$z(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi} Q(\alpha, \eta)\, d\alpha. \qquad \text{(IV, 20)}$$

Mai departe, soluția particulară (IV,18) va fi

$$v_1 = \int_{\xi}^{\eta} z(\xi, \beta)\, d\beta \qquad \text{(IV, 21)}$$

sau, comparînd (IV,20) și (IV,21), avem soluția particulară a ecuației (IV,15) sub forma

$$v_1 = \frac{1}{4}\int_{\xi}^{\eta}\left[\int_{\beta}^{\xi} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\right] d\beta = -\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\left[\int_{\beta}^{\xi} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\right] d\beta. \qquad \text{(IV, 22)}$$

Integrala (IV, 22) este extinsă la domeniul

$$\xi < \alpha < \beta < \eta,$$

care reprezintă triunghiul ABC (v. fig. 6), unde coordonatele punctului A, sînt ξ și η.

Cu alte cuvinte

$$v_1 = -\frac{1}{4}\iint_{\Delta ABC} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Să observăm acum că această integrală se exprimă cu suma altor trei integrale:

$$v_1 = -\frac{1}{4}\iint_{\Delta CEG} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta - \frac{1}{4}\iint_{\Delta DBF} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta - \frac{1}{4}\iint_{ADFGE} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

(notațiile sînt evidente).

Triunghiul CEG depinde numai de coordonata ξ a punctului A, iar triunghiul DBF depinde numai de coordonata η a acestui punct. Punctul A se ia în interiorul semifîșiei.

Prin urmare

$$-\frac{1}{4}\iint_{\Delta CEG} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = w_1(\xi), \quad -\frac{1}{4}\iint_{\Delta DBF} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = w_2(\eta).$$

Dacă funcția v_1 satisface ecuația (IV, 15), atunci și funcția

$$v = v_1 - w_1(\xi) - w_2(\eta) = -\frac{1}{4}\iint_{ADFGE} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta \qquad \text{(IV, 23)}$$

va satisface aceeași ecuație.

Dacă facem o schimbare de variabile în integrala (IV, 23), revenind la x și t, obținem

$$\frac{D(\alpha, \beta)}{D(x, t)} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a,$$

de unde

$$v = -\frac{a}{2}\iint_{ADFGE} p(x, t)\, dx\, dt, \qquad \text{(IV, 24)}$$

unde $ADFGE$, are forma reprezentată în fig. 7.

Vom căuta soluția problemei puse sub forma unei soluții particulare a ecuației neomogene și a unei soluții a ecuației omogene, care satisface condițiile la limită. Pentru aceasta, introducem, în locul lui u, o nouă funcție necunoscută cu ajutorul formulei

$$w = u - v. \qquad \text{(IV, 25)}$$

Funcția w va satisface atunci ecuația omogenă a coardei vibrante și condițiile de același tip ca și (IV, 12) și (IV, 13).

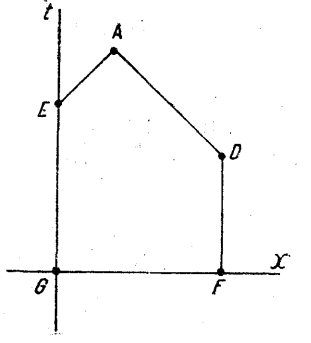

Fig. 7

Analizînd problema, putem considera chiar de la început $p(x, t) = 0$, iar condițiile (IV, 12) și (IV, 13) ca transformate în conformitate cu formula (IV, 25).

Substituția noastră nu are efect asupra unicității și existenței soluției. Dacă problema, așa cum a fost pusă inițial, este corectă, ea rămîne corectă și după substituție. Intr-adevăr, soluția v

depinde în mod continuu de condițiile inițiale. Noile condiții pentru w vor fi legate în mod continuu cu v și, prin urmare, cu funcția $p(x, t)$. De aceea, micile abateri ale lui $p(x, t)$, f_1, f_2, ne vor da mici abateri pentru soluția u.

Soluția ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(IV, 1)}$$

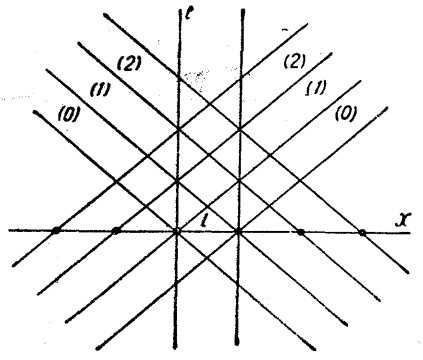

Fig. 8

poate fi căutată din nou sub forma anterioară

$$u = \psi_1(x - at) + \psi_2(x + at). \qquad \text{(IV, 5)}$$

Condițiile inițiale (IV, 13) ne permit ca și în prima problemă să determinăm funcțiile $\psi_1(x)$ și $\psi_2(x)$ în intervalul

$$0 \leqslant x \leqslant l$$

Funcția u este determinată într-un triunghi care se găsește în fîșie și care se sprijină pe axa absciselor ($t > 0$) fig. 8.

Să vedem dacă putem satisface condițiile (IV, 12) alegînd, în mod judicios prelungirea lui $\psi_1(t)$ și $\psi_2(t)$ în întregul domeniu care ne interesează.

Substituția soluției (IV, 5) în condițiile (IV, 12) ne dă

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\psi_1(-at) + \beta\psi_1'(-at) + \alpha\psi_2(at) + \beta\psi_2'(at) = f_1(t), \\ &\gamma\psi_1(l-at) + \delta\psi_1'(l-at) + \gamma\psi_2(l+at) + \delta\psi_2'(l+at) = f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV, 26)}$$

Putem duce în planul (x, t) două șiruri de fîșii paralele la dreptele $x - at = 0$ și $x + at = 0$ și în care să fie satisfăcute inegalitățile

$$-lk < x - at < -l(k-1), \qquad \text{[k]}$$

$$ml < x + at < (m+1)l. \qquad \text{\{m\}}$$

Vom nota fiecare din fîșii cu numărul corespunzător din paranteze mari, sau din acolade (fig. 8).

Prima condiție (IV,26) ne permite să determinăm valoarea lui ψ_1 în fîșia [m], dacă este cunoscută valoarea lui ψ_2 în fișia \{m−1\}, iar a doua ne permite să determinăm valoarea lui ψ_2 în fîșia \{k\}, dacă este cunoscut ψ_1 în fîșia [k−1], cu ajutorul rezolvării unei ecuații diferențiale ordinare cu coeficienți constanți. Pentru aceasta este suficient să notăm, de exemplu, în prima din ecuațiile (IV,26) at cu ξ, după care aceasta ia forma

$$\alpha\psi_1(\xi) + \beta\psi_1'(\xi) = \alpha\psi_2(-\xi) - \beta\psi_2'(-\xi) + f_1\left(-\frac{\xi}{a}\right), \qquad \text{(IV, 27)}$$

iar în cea de a doua din ecuațiile (IV,26) să punem $l - at = \xi$, aducînd-o la forma

$$\gamma\psi_1(\xi) + \delta\psi_1'(\xi) = \gamma\psi_2(2l-\xi) - \delta\psi_2'(2l-\xi) + f_2\left(\frac{l-\xi}{a}\right). \qquad \text{(IV, 28)}$$

Cunoscînd pe ψ_2 în \{0\} și apoi rezolvînd ecuația (IV, 27) în raport cu ψ_1, obținem valoarea lui ψ_1 în [1], și apoi continuînd rezolvarea pe (IV,28) în raport cu ψ_2, determinăm pe ψ_2 în \{2\} ș.a.m.d. Constanta arbitrară o determinăm din condiția de continuitate a lui ψ_1 și ψ_2.

Exact la fel, pornind de la valorile ψ_1 în [0] și rezolvînd ecuația (IV,28), obținem valorile lui ψ_2 în \{1\} și apoi continuînd rezolvarea pe (IV,27) în raport cu ψ_1, obținem valoarea lui ψ_1 în [2] ș.a.m.d.

Este clar că putem satisface în acest mod toate condițiile puse.

De asemenea, nu încape nici o îndoială, atît în ceea ce privește existența și unicitatea soluției problemei, cît și în ceea ce privește punerea sa corectă.

Unica împrejurare pe care trebuie s-o verificăm constă în faptul că nu este clar, dacă funcțiile ψ_1 și ψ_2 construite de noi vor admite derivate de ordinul al doilea continue. Lăsăm în seama cititorilor să deducă condițiile necesare și suficiente pentru

aceasta și ne vom mărgini la observația că, lărgind clasa soluțiilor ecuației (IV, 1), putem lăsa de o parte condiția ca derivatele de ordinul al doilea ale funcțiilor : ψ_1 și ψ_2 să fie continue.

Ecuația coardei vibrante și ecuațiile de tipul hiperbolic cu două variabile independente analoge cu ea, se întîlnesc adesea în diferite chestiuni ale fizicii matematice.

LECȚIA a V-A

METODA LUI RIEMANN

§ 1. Prima problemă la limită pentru ecuațiile hiperbolice

Pentru construirea soluțiilor ecuației coardei vibrante, ne-am folosit de proprietatea fundamentală a caracteristicilor acestei ecuații, care ne permite să integrăm dintr-odată ecuația (IV,3).

Această proprietate constă în aceea că ecuația (IV,3) s-a transformat pe curba caracteristică $\xi = \text{const.}$ într-o ecuație diferențială ordinară în raport cu funcția $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ cu variabila independentă η. De aceea, ne-a fost posibil să găsim funcția u cu ajutorul unor cuadraturi. Această proprietate a caracteristicilor, adică existența de-a lungul lor a unor ecuații cu un număr mai mic de variabile, legînd valorile funcției necunoscute și derivatele sale, este la baza unor metode importante de integrare a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic.

Să considerăm ecuația de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = F(x, y). \qquad (V,1)$$

După cum am văzut, la o asemenea formă ne conduce orice ecuație liniară hiperbolică cu două variabile independente. Să considerăm următoarea problemă ajutătoare :

Să presupunem dată valoarea lui u pe două drepte concurente paralele cu axele de coordonate (adică pe caracteristici)

$$\left.\begin{aligned} u|_{x=x_0} &= \varphi_1(y); \qquad y_0 \leqslant y \leqslant b, \\ u|_{y=y_0} &= \varphi_2(x); \qquad x_0 \leqslant x \leqslant a, \end{aligned}\right\} \qquad (V,2)$$

în care $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0)$.

Funcțiile $\varphi_1(y)$ și $\varphi_2(x)$ *sînt presupuse avînd derivate de ordinul întîi continue.*

Vom demonstra că ecuația (V,1) *admite în dreptunghiul*

$$x_0 \leqslant x \leqslant a,$$

$$y_0 \leqslant y \leqslant b$$

o soluție unică, care satisface condițiile (V,2)

Să punem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w. \tag{V,3}$$

Ecuația (V,1) poate fi pusă sub forma de sistem :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = F(x, y) - a(x, y)\, v - b(x, y)\, w - c(x, y)\, u. \tag{V,4}$$

De aici, urmează imediat

$$\left.\begin{aligned} v(x, y) &= v(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} [F(x, y) - a(x, y)\, v - \\ &\quad - b(x, y)\, w - c(x, y)\, u]\, dy, \\ w(x, y) &= w(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} [F(x, y) - a(x, y)\, v - \\ &\quad - b(x, y)\, w - c(x, y)\, u]\, dx, \\ u(x, y) &= u(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} w(x, y)\, dy \end{aligned}\right\} \tag{V,5}$$

iar în baza lui (V,2), avem

$$v(x, y_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=y_0} = \varphi_2'(x),$$

$$w(x_0, y) = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=x_0} = \varphi_1'(y).$$

Din (V,4) și (V,2), rezultă

$$\left.\begin{aligned} v(x, y) &= \varphi_2'(x) + \\ &+ \int_{y_0}^{y} [F(x, y) - a(x, y)\, v - b(x, y)\, w - c(x, y) u]\, dy, \\ w(x, y) &= \varphi_1'(y) + \\ &+ \int_{x_0}^{x} [F(x, y) - a(x, y)\, v - b(x, y)\, w - c(x, y)\, u]\, dx, \\ u(x, y) &= \varphi_2(x) + \int_{y_0}^{y} w\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{V, 6}$$

Reciproc, orice soluție a sistemului (V,6) satisface evident sistemul de ecuații (V,4) și cea de-a doua ecuație (V, 3). În afară de aceasta,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial w}{\partial x}\, dx =$$

$$= \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y}]F(x, y) - a(x, y)\, v - b(x, y)\, w - c(x, y)\, u]\, du = v.$$

Prin urmare, este satisfăcută și prima ecuație (V,3). Mai departe, din (V,6), urmează

$$u|_{y=y_0} = \varphi_2(x),$$

$$u\Big|_{x=x_0} = \varphi_2(x_0) + \int_{y_0}^{y} w\Big|_{x=x_0} dy = \varphi_2(x_0) + \int_{y_0}^{y} \varphi_1'(y)\, dy =$$

$$= \varphi_2(x_0) + \varphi_1(y) - \varphi_1(y_0) = \varphi_1(y).$$

Astfel, fiecare soluție a sistemului (V,6) este o soluție a problemei propuse. Din toate cele arătate mai sus, rezultă că sistemul (V,6) este echivalent cu ecuația (V,1) cu condițiile (V, 2). Soluția sistemului (V, 6) o vom căuta cu ajutorul metodei aproximațiilor succesive. Fie

$$v_0 = \varphi_2'(x), \quad w_0 = \varphi_1'(y), \quad u_0 = \varphi_2(x).$$

Vom pune mai departe

$$\left.\begin{aligned} v_n &= \varphi_2'(x) + \\ &+\int_{y_0}^{y}[F(x,y)-a(x,y)\,v_{n-1}-b(x,y)\,w_{n-1}-c(x,y)\,u_{n-1}]\,dy, \\ w_n &= \varphi_1'(y) + \\ &+\int_{x_0}^{x}[F(x,y)-a(x,y)\,v_{n-1}-b(x,y)\,w_{n-1}-c(x,y)\,u_{n-1}]\,dx, \\ u_n &= \varphi_2(x)+\int_{y_0}^{y} w_{n-1}\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (V,7)$$

Să demonstrăm convergența șirurilor u_n, v_n și w_n. Pentru aceasta vom presupune că toate funcțiile $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi'_1(y)$, $\varphi'_2(x)$, $F(x,y)$, $a(x,y)$ $b(x,y)$ și $c(x,y)$ sînt mărginite în dreptunghiul (V,2). Vom avea:

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= -\int_{y_0}^{y}[a(x,y)(v_n-v_{n-1}) + \\ &\quad + b(x,y)(w_n-w_{n-1}) + c(x,y)(u_n-u_{n-1})]\,dy, \\ w_{n+1}-w_n &= -\int_{x_0}^{x}[a(x,y)(v_n-v_{n-1}) + \\ &\quad + b(x,y)(w_n-w_{n-1}) + c(x,y)(u_n-u_{n-1})]\,dx, \\ u_{n+1}-u_n &= \int_{y_0}^{y}(w_n-w_{n-1})\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (V,8)$$

Să presupunem că $|u_n-u_{n-1}|$, $|v_n-v_{n-1}|$, $|w_n-w_{n-1}|$ satisfac inegalitățile

$$\left.\begin{aligned} |v_n-v_{n-1}| &\leqslant K^{n-1}A\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |w_n-w_{n-1}| &\leqslant K^{n-1}A\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |u_n-u_{n-1}| &\leqslant K^{n-1}A\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}\right\} \quad (V,9)$$

unde $|a(x,y)|+|b(x,y)|+|c(x,y)|\leqslant K$, iar A este o constantă arbitrară.

Pentru $n=1$, inegalitățile (V,9) sînt evidente, dacă alegem constanta A suficient de mare. Să arătăm că aceste inegalități rămîn valabile, cînd schimbăm pe n în $n+1$. Din (V,8), avem, de exemplu,

$$|v_{n+1}-v_n| \leqslant \int_{y_0}^{y}(|a|+|b|+|c|)\,K^{n-1}A\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant AK^n\int_{y_0}^{y}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,dy =$$

$$= AK^n\left[\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}-\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right] \leqslant AK^n\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}.$$

La fel se evaluează și celelalte diferențe (V,9).

Din evaluările (V,9) rezultă convergența absolută și uniformă a seriilor

$$u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1}),\ v_0+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1}),\ w_0+\sum_{n=1}^{\infty}(w_n-w_{n-1}),$$

ai căror termeni sînt în valoare absolută mai mici decît termenii seriei uniform convergente

$$A+A\sum_{n=1}^{\infty}K^{n-1}\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

reprezentînd, precum se știe, funcția

$$A+Ae^{K(x+y-x_0-y_0)},$$

Prin urmare, u_n, v_n și w_n tind uniform în dreptunghiul $\{x_0\leqslant x\leqslant a,\ y_0\leqslant y\leqslant b\}$ către limite bine determinate. Trecînd la limită în formulele (V, 7), vedem că funcțiile limită u, v și w satisfac sistemul (V, 6), așa că problema noastră este rezolvată. Să observăm că putem considera la fel de bine și cazul cînd $x<x_0$, $y<y_0$ deoarece prin aceasta nu s-ar schimba nici unul din raționamentele noastre.

Nu este greu să stabilim unicitatea soluției problemei considerate. Pentru aceasta este suficient să verificăm că în cazul

în care $F \equiv 0$, $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$, sistemul (V,6) nu are alte soluții mărginite, decît $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, $w \equiv 0$. Să presupunem că ar exista o soluție, care satisface condițiile $|u| < A$, $|v| < A$, $|w| < A$. Funcțiile u, v, w vor satisface inegalitățile :

$$\left.\begin{aligned} |u| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_o-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |v| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |w| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}\right\} \quad (V,9')$$

Aceste inegalități se obțin pe aceeași cale pe care au fost obținute inegalitățile (V,9), adică prin metoda evaluărilor succesive.

De aici, rezultă imediat unicitatea soluției problemei propuse, deoarece unicul sistem de funcții care satisface inegalitățile (V,9′) oricare ar fi n, este $u = v = w = 0$.

§ 2. Operatori diferențiali adjuncți

Să considerăm operatorul diferențial liniar de ordinul al doilea

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu, \quad (V,10)$$

unde A_{ij}, B_i și C sînt funcții de două ori derivabile în raport cu variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Fără a reduce gradul de generalitate, putem considera $A_{ij} = A_{ji}$. Pentru aceasta este suficient să notăm cu A_{ij} jumătatea coeficientului derivatei $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Vom numi operatorul

$$Mv \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv \quad (V,11)$$

operator adjunct operatorului Lu.

Este ușor să stabilim printr-un calcul direct că noțiunea de adjuncțiune posedă proprietatea de reciprocitate ; operatorul adjunct al operatorului adjunct M va fi operatorul inițial L.

Dacă operatorul L coincide cu operatorul său adjunct M, el se va numi operator *autoadjunct*.

Este valabilă formula

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right] + B_i uv \right\} \quad (V,12)$$

Cu alte cuvinte expresia $vLu - uMv$ reprezintă o sumă de derivate parțiale în raport cu x_i ale unor anumite expresii P_i, adică

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i},$$

în care

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \left(vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right) + B_i uv. \quad (V,13)$$

Formula (V,12) se verifică prin derivare directă. Avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = &\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} vA_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} vB_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cuv \right] - \\ &- \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} u \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cuv \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Ultima sumă se anulează și obținem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = vLu - uMv, \quad (V,14)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să considerăm acum un volum oarecare Ω n — dimensional, mărginit de o suprafață S[1]) netedă pe porțiuni.

(În cazul cînd $n = 2$ sau 1, cuvîntul „volum” și „suprafață” se înlocuiesc prin cuvintele „domeniu” și „curbă” ; respectiv „segment” și „extremitățile segmentului”).

[1]) Presupunem îndeplinite toate condițiile de continuitate ale funcțiilor și ale derivatelor lor impuse la stabilirea formulei (1,2).

În baza unei formule analoge formulei (I,2) vom avea

$$\int\int_{\Omega} \cdots \int (vLu - uMv)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= -\int_{S} \cdots \int \sum_{i=1}^{n} P_i \cos(nx_i)\, dS. \qquad (V,15)$$

în care $\cos(nx_1)$, $\cos(nx_2)$, ... sînt cosinusurile directoare ale normalei interioare la S.

Formula (V,15) *poartă numele de formula lui Green*

Să considerăm două exemple.

Exemplul 1. *Formula lui Green pentru operatorul lui Laplace.*

Fie $Lu = \Delta u$. Avem

$$Mv = \Delta v,\ P_x = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x},\quad P_y = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$P_z = v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Formula lui Green ia forma

$$\int\int_{\Omega}\int (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = -\int\int_{S}\Big[\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\cos nx +$$

$$+\Big(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\cos(ny) + \Big(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\Big)\cos nz\Big]\, dS =$$

$$= \int\int_{S}\Big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\, dS, \qquad (V,16)$$

în care am notat, ca de obicei cu $\frac{\partial v}{\partial n}$ derivata normală a funcției v. Ea este egală cu proiecția vectorului grad v, de componente $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$ pe direcția normalei interioare. Formula (V,16) se numește de asemenea formula lui Green pentru operatorul lui Laplace.

Exemplul 2. Drept al doilea exemplu să considerăm ecuația (V,1).

Pentru operatorul Lu, care se găsește în membrul stîng al acestei ecuații, operatorul adjunct Mv și funcțiile P_1 și P_2 vor avea forma

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv,$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\Big) + auv,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv.$$

Cu acestea, formula lui Green ne dă (folosind normala interioară):

$$\int\int_{\Omega}(vLu - uMv)\, dx\, dy = -\int_{S}\Big\{\Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\Big) + auv\Big]\cos(nx) +$$

$$+\Big[\frac{1}{2}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + buv\Big]\cos(ny)\Big\}\, dS. \qquad (V,17)$$

§ 3. Metoda lui Riemann

Riemann a propus o metodă importantă de găsire a diferitelor soluții pentru ecuația (V,1), bazată pe folosirea formulei lui Green (V,17). Ne vom ocupa de rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația (V,1). Să presupunem că ne sînt date valorile lui u și $\frac{\partial u}{\partial y}$ pe curba

$$y = \mu(x),$$

cu condițiile

$$\mu'(x) < 0, \qquad (V,18)$$

$$u|_{y=\mu(x)} = \varphi_0(x), \qquad (V,19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mu(x)} = \varphi_1(x) \qquad (V,20)$$

[derivata din formula (V,20) se consideră parțială și nicidecum de-a lungul curbei $y = \mu(x)$].

Derivînd formula (V,19), avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=\mu(x)} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mu(x)} \mu'(x) = \varphi_0'(x),$$

de unde:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=\mu(x)} = \varphi_0'(x) - \varphi_1(x)\,\mu'(x). \qquad (V, 21)$$

Să aducem formula (V, 17) la o formă ceva mai comodă. Presupunînd că parcurgerea domeniului se face în sens invers acelor unui ceasornic, astfel ca suprafața înconjurată să rămînă la stînga, vom avea

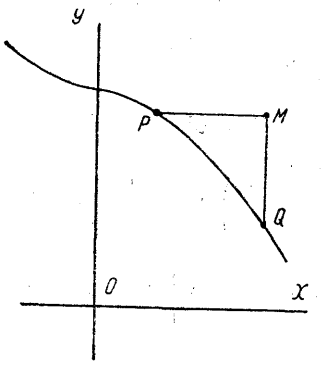

Fig. 9.

$$dx = \cos(ny)\,dS,$$
$$dy = -\cos(nx)\,dS,$$

considerînd dS totdeauna pozitiv.

Folosind aceste relații, vom obține din formulele (V, 17):

$$\iint_\Omega (vLu - uMv)\,dx\,dy =$$

$$= \int_S \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - buv\right]dx -$$

$$- \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - auv\right]dy. \qquad (V, 22)$$

Să ducem prin punctul M (fig. 9), de coordonate (x_0, y_0), două drepte paralele cu axele de coordonate pînă la intersecția lor cu curba $y = \mu(x)$, în punctele P și Q.

Aplicînd formula (V, 18) triunghiului MPQ, avem:

$$\iint_\Omega (vLu - uMv)\,dx\,dy = \int_P^Q \left\{\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - buv\right]dx - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - auv\right]dy\right\} + \int_Q^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + auv\right]dy + \int_P^M \left[\left(\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right]dx. \qquad (V, 23)$$

Să transformăm ultimele două integrale

$$\int_Q^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right]dy = \frac{1}{2}uv\Big|_Q^M + \int_Q^M \left(-u\frac{\partial v}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + auv\right)dy = \frac{1}{2}uv\Big|_Q^M + \int_Q^M u\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + av\right)dy, \qquad (V, 24)$$

$$\int_P^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right]dx = \frac{1}{2}uv\Big|_P^M + \int_P^M u\left(-\frac{\partial v}{\partial x} + bv\right)dx$$

(V, 25)

Aceste formule ne permit să rezolvăm ușor problema noastră. Fie $v(x, y; x_0, y_0)$ o funcție care satisface condițiile

$$Mv = 0,$$

$$v|_{x=x_0} = e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0,y)dy}, \quad v|_{y=y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} b(x,y_0)dx}$$

Deducem din acestea

$$v(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=x_0} = a(x_0, y)\,e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0,y)dy} = a(x_0, y)v\Big|_{x=x_0},$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=y_0} = b(x, y_0)\,e^{\int_{x_0}^{x} b(x,y_0)dx} = b(x, y_0)v\Big|_{y=y_0}.$$

Existența unei asemenea funcții a fost stabilită de noi în paragraful precedent ca rezultat al rezolvării primei probleme la limită. Funcția v, care satisface aceste condiții, se numește *funcția lui Riemann*.

Deoarece pe dreapta PM avem $y = y_0$, iar pe dreapta QM,

avem $x = x_0$, ultimii termeni din formulele (V, 24) şi (V, 25) se anulează şi obţinem

$$\left.\begin{aligned} \int_Q^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right] dy &= \frac{1}{2}uv\Big|_Q^M, \\ \int_P^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right] dx &= \frac{1}{2}uv\Big|_P^M. \end{aligned}\right\} \quad (V, 26)$$

Să revenim acum la formula (V, 23) care, după introducerea în ea a lui (V,26), ne dă

$$\iint_\Omega vF(x, y)\, dx\, dy = u\Big|_M - \frac{1}{2}(uv)\Big|_P - \frac{1}{2}(uv)\Big|_Q + \Phi, \quad (V, 27)$$

unde am notat cu Φ primul termen al membrului drept din formula (V, 23), care se exprimă în întregime cu ajutorul lui v şi cu ajutorul unor funcţii cunoscute, deoarece în baza condiţiilor (V, 19) (V, 20), (V, 21) şi (V, 22) u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sînt cunoscute pe această curbă.

Cu acestea, (V, 27) ne dă *formula lui Riemann*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(uv)\Big|_P + \frac{1}{2}(uv)\Big|_Q - \Phi + \iint_\Omega vF(x, y)\, dx\, dy. \quad (V, 28)$$

Precum vedem, formula (V, 28) ne permite să scriem sub formă explicită soluţia problemei care ne interesează, deoarece (x_0, y_0) este un punct arbitrar.

Din însăşi metoda de obţinere a formulei lui Riemann rezultă că problema pusă poate avea numai o soluţie unică, deoarece am obţinut pentru funcţia necunoscută u, o expresie explicită şi definită în mod univoc, fără a face nici un fel de presupuneri asupra ei, înafară de existenţa sa. Pentru a termina cercetarea ne rămîne să arătăm că soluţia considerată a problemei lui Cauchy, există într-adevăr.

Să observăm că este suficient să stabilim existenţa soluţiei pentru ecuaţia (V, 1) în condiţiile în care u şi derivatele sale de ordinul întîi se anulează pe curba $y = \mu(x)$. Intr-adevăr, am fi putut introduce în locul funcţiei u, o nouă funcţie necunoscută

$$w = u - \varphi_0(x) - [y - \mu(x)]\,\varphi_1(x).$$

Funcţia w va satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + a(x, y)\frac{\partial w}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial w}{\partial y} + c(x, y)\, w = F_1(x, y),$$

în care

$$\begin{aligned} -F_1(x, y) &= F(x, y)\,\varphi_1'(x) - a(x, y)\{\varphi_0'(x) + \\ &+ [y - \mu(x)]\,\varphi_1'(x) - \mu'(x)\,\varphi_1(x)\} - b(x, y)\,\varphi_1(x) - c(x, y)\{\varphi_0(x) + \\ &+ [y - \mu(x)]\,\varphi_1(x)\}, \end{aligned} \quad (V, 29)$$

şi condiţiile omogene

$$w\Big|_{y=\mu(x)} = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=\mu(x)} = 0.$$

Ecuaţia (V, 29) are aceeaşi formă ca şi (V, 1); se deosebeşte însă de aceasta prin termenul liber. Dacă vom demonstra existenţa soluţiei noii probleme pentru funcţia w, din aceasta va rezulta existenţa soluţiei problemei iniţiale. În cazul cînd funcţiile φ_0 şi φ_1 sînt nule, formula lui Riemann ne dă

$$u(x_0, y_0) = \iint_\Omega vF(x, y)\, dx\, dy. \quad (V, 30)$$

Este suficient să demonstrăm că funcţia $u(x_0y_0)$, determinată cu ajutorul formulei (V, 30), satisface ecuaţia (V, 1) şi se anulează împreună cu derivatele sale de ordinul întîi, pentru $y_0 = \mu(x_0)$. Să verificăm la început ultima afirmaţie. Pentru $y_0 = \mu(x_0)$ domeniul Ω dispare şi prin urmare $u|_{y_0=\mu(x_0)} = 0$.

Mai departe, în virtutea regulii de derivare a integralelor în cazul unui domeniu variabil, indicată mai sus, avem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_0} &= \int_Q^M vF(x_0, y)\, dy + \iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_0} F(x, y)\, dx\, dy, \\ \frac{\partial u}{\partial y_0} &= \int_P^M vF(x, y_0)\, dx + \iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial y_0} F(x, y)\, dx\, dy. \end{aligned}\right\} \quad (V, 31)$$

În ambele formule, integralele din membrul drept se anulează pentru $y_0 = \mu(x_0)$. Rămîne să ne convingem de faptul că $u(x_0, y_0)$ satisface ecuaţia (V, 1). Vom verifica aceasta ceva mai tîrziu.

§ 4. Funcția lui Riemann pentru ecuația adjunctă

În § 1 am găsit soluția primei probleme la limită cu ajutorul metodei aproximațiilor succesive. Metoda lui Riemann ne permite să găsim soluția acesteia sub o formă mai comodă. Să presupunem, ca și în primul paragraf al acestei lecții, că ni se cere să găsim soluția u a ecuației (V, 1) cu condițiile (V, 2). Să ducem în planul (x, y) dreptele $x = x_0$ și $y = y_0$, pe care să le notăm respectiv cu SP și SQ, punctul S având coordonatele (x_0, y_0). Să ducem din punctul M, care are coordonatele (x_1, y_1), dreptele MP și MQ, paralele cu axele de coordonate. Să aplicăm formula (V, 22) dreptunghiului $MPSQ$, luînd pentru u o soluți deocamdată necunoscută, iar pentru v, funcția lui Riemane $v(x, y; x_1, y_1)$. Vom avea

$$\iint_{\Omega}(vLu - u\,Mv)\,dx\,dy = \iint_{\Omega} vF\,dx\,dy =$$

$$= \int_P^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right]dx + \int_Q^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right]dy - \int_S^Q \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right]dx - \int_S^P \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right]dy.$$

Transformînd, ca și înainte, integralele pe segmentele $\overline{PM}$ și $\overline{QM}$ și observînd că pe segmentele $\overline{SQ}$ și $\overline{SP}$ expresiile, care stau sub semnul integral, sînt alcătuite din funcții cunoscute, obținem

$$\iint_{\Omega} vF(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= u\Big|_M - \frac{1}{2}uv\Big|_P - \frac{1}{2}uv\Big|_Q - \int_S^Q \left[\frac{1}{2}\left(v\varphi_2' - \frac{\partial v}{\partial x}\varphi_2\right) + bv\varphi_2\right]dx - \int_S^P \left[\frac{1}{2}\left(v\varphi_1' - \frac{\partial v}{\partial x}\varphi_1\right) + av\varphi_1\right]dy. \quad \text{(V, 32)}$$

Este comod să ne debarasăm în această formulă de derivatele funcției v. În acest scop, să integrăm prin părți ambele integrale din membrul drept al formulei (V, 32). Lăsînd pe $u|_M$ în membrul stîng al ecuației și trecînd în membrul drept ceilalți termeni obținem:

$$u\Big|_M = \frac{1}{2}uv\Big|_P + \frac{1}{2}uv\Big|_Q - \frac{1}{2}uv\Big|_S^Q - \frac{1}{2}uv\Big|_S^P + \int_S^Q v(\varphi_2' + b\varphi_2)\,dx + \int_S^P v(\varphi_1' + a\varphi_1)\,dy + \iint_{\Omega} vF(x, y)\,dx\,dy.$$

Astfel,

$$u|_M = uv|_S + \int_S^Q v(\varphi_2' + b\varphi_2)\,dx + \int_S^P v(\varphi_1' + a\varphi_1)\,dy + \iint_{\Omega} vF(x, y)\,dx\,dy. \quad \text{(V, 33)}$$

Din formula (V, 33) rezultă o consecință importantă. Să presupunem că funcția u este funcția lui Riemann pentru ecuația adjunctă

$$Mv = 0,$$

adică reprezintă o funcție, care satisface ecuația omogenă Lu și condițiile

$$u|_{y=y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} b(x, y_0)\,dx}, \quad u|_{x=x_0} = e^{\int_{y_0}^{y} (a\,x_0, y)\,dy}.$$

În această ipoteză, toți termenii membrului drept din (V, 33) se anulează și obținem, folosind egalitatea $u|_S = 1$,

$$u|_M = v|_S \text{ sau } u(x_1, y_1; x_0, y_0) = v(x_0, y_0; x_1, y_1).$$

Această relație se numește teorema de simetrie a funcției lui Riemann. În cuvinte, aceasta se formulează astfel: dacă în funcția lui Riemann considerăm drept coordonate curente variabilele x_0, y_0, x_1, y_1 fiind coordonatele vîrfului, obținem funcția lui Riemann pentru ecuația adjunctă.

Consecință. *Funcția lui Riemann* $v(x, y; x_0, y_0)$ *definită mai sus, satisface ecuația*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y_0} + a(x_0, y_0)\frac{\partial v}{\partial x_0} + b(x_0, y_0)\frac{\partial v}{\partial y_0} + c(x_0, y_0)v = 0. \quad \text{(V. 34)}$$

Folosindu-ne de acest fapt, putem verifica ușor că funcția $u(x_0, y_0)$, determinată cu ajutorul formulei (V, 30), satisface într-adevăr ecuația (V, 1) și, prin urmare, este soluția problemei lui Cauchy. Derivînd prima din formulele (V, 31) în raport cu y_0, obținem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y_0} = v\Big|_{(x_0, y_0)} F(x_0, y_0) + \int_Q^M \frac{\partial v}{\partial y_0} F(x_0, y)\, dy +$$

$$+ \int_P^M \frac{\partial v}{\partial x_0} F(x, y_0)\, dx + \iint_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y_0} F(x, y)\, dx\, dy.$$

De aici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y_0} + a(x_0, y_0)\frac{\partial u}{\partial x_0} + b(x_0, y_0)\frac{\partial u}{\partial y_0} + c(x_0, y_0) =$$

$$= F(x_0 y_0) + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} + av\right) F(x_0, y)\, dy + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} + bv\right) F(x, y_0)\, dx +$$

$$+ \iint_\Omega \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial y_0} + a(x_0, y_0)\frac{\partial v}{\partial x_0} + b(x_0, y_0)\frac{\partial v}{\partial y_0} + c(x_0, y_0)\, v\right] F(x, y)\, dx\, dy.$$

Din ultima formulă, obținem direct

$$Lu = F,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

§ 5. Cîteva consecințe calitative ale formulei lui Riemann

Din formula lui Riemann decurg cîteva consecințe, care prezintă un interes general. Să ne oprim asupra lor ceva mai amănunțit.

Vom studia comportarea soluției problemei lui Cauchy pentru ecuația (V, 1) în funcție de variația condițiilor inițiale. Este ușor de văzut că valoarea acestei soluții într-un anume punct (x_0, y_0) nu depinde de loc de datele lui Cauchy din exteriorul triunghiului curbiliniu MPQ, format de cele două caracteristice duse prin acest punct și de curba care poartă datele inițiale. Dacă vom schimba datele din exteriorul triunghiului, soluția va varia numai în exteriorul triunghiului. Astfel, fiecare caracteristică va separa domeniul în care soluția a rămas neschimbată de domeniul în care soluția s-a schimbat. Ajungem la următoarea concluzie: *unei soluții a problemei lui Cauchy definită la interiorul triunghiului* MPQ, *îi putem asocia soluții în genere diferite, care sînt prelungirea acestei soluții în domenii situate de cealaltă parte a caracteristicilor.*

Astfel, caracteristicile sînt linii prin care putem împărți domeniul de existență al soluției, atunci cînd vrem să înlocuim în anumite porțiuni ale acestui domeniu o soluție prin alta, astfel încît prin aceasta să obținem din nou o soluție a ecuației în întreg domeniul. Această proprietate importantă a caracteristicilor este strîns legată de faptul că la condiții inițiale arbitrare, date pe caracteristice, problema lui Cauchy nu este în general rezolvabilă. Pentru oricare altă curbă, cunoscînd soluția de o parte a curbei, am fi putut găsi valoarea soluției și a derivatelor sale pe această curbă și am fi putut rezolva problema lui Cauchy pentru domenii situate de cealaltă parte a curbei. Astfel, putem prelungi, în mod univoc, soluția ecuației dincolo de oricare linie necaracteristică.

LECȚIA a VI-a

INTEGRALE MULTIPLE

În cursul de analiză matematică se studiază în special funcțiile continue de una sau de mai multe variabile independente. Totuși asemenea funcții se dovedesc a fi insuficiente în chestiunile fizicii matematice, în care funcțiile discontinue și nemărginite capătă o importanță esențială. Noțiunea cea mai importantă, a cărei utilizare este necesară pentru funcțiile discontinue din problemele fizicii matematice, este noțiunea de integrală. De aceea, ne vom opri în special asupra teoriei integrării funcțiilor discontinue și a funcțiilor nemărginite. Vom construi pentru aceste funcții teoria integralei Lebesgue, urmărind în esență ideile școlii matematice ruse și vom demonstra pentru această integrală toate teoremele fundamentale, care se expun de obicei în cursurile de calcul integral pentru integralele funcțiilor continue.

Nu trebuie să ne gîndim că scopul expunerii noastre ar fi numai dorința de a atinge cea mai mare generalizare în teoria integrării funcțiilor discontinue. Generalizarea noțiunii de integrală dă teoriei integrării desăvîrșirea interioară și permite să obținem, datorită acesteia, o serie întreagă de teoreme importante, care nu au loc pentru integralele obișnuite ale funcțiilor continue.

În cele ce urmează ne vom folosi de următoarele trei rezultate importante.

1) Criteriul referitor la trecerea la limită sub semnul integral.

2) Teorema asupra posibilității schimbării ordinei de integrale în integralele multiple (teorema Lebesgue-Fubini).

3) Criteriul de convergență în medie a șirurilor de funcții.

Vom considera integrarea funcțiilor discontinue și a funcțiilor nemărginite, folosindu-ne în cea mai mare măsură de ideea care poate fi denumită ideea *eliminării singularităților*.

Dacă funcția f de mai multe variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definită într-un anumit domeniu Ω, este discontinuă în acest domeniu, însă devine continuă în domeniul Ω', rămas după eliminarea din Ω a unui anumit domeniu parțial oricît de mic σ, calea naturală pentru găsirea integralei acestei funcții constă în aceea că se consideră mai întîi integrala extinsă asupra lui Ω' și apoi se trece la limită făcînd pe Ω' să tindă către Ω. Această metodă este utilizată totdeauna în teoria elementară a integralelor improprii.

Vom expune teoria integralelor Lebesgue, folosind aceeași cale, generalizînd-o numai întrucîtva. De mare importanță pentru noi va fi noțiunea de funcție continuă pe o mulțime închisă. Proprietățile mulțimilor închise, adică a mulțimilor care conțin toate punctele lor limită, le vom studia ceva mai tîrziu. Vom observa acum că o funcție, continuă pe o mulțime închisă de puncte, posedă o serie de proprietăți importante care ne permit, în particular, să-i construim integrala.

Alături de mulțimile închise, vom studia și mulțimile deschise, adică acele mulțimi care nu conțin niciunul din punctele frontierei lor. Vom defini la început

noțiunea de integrală pentru funcțiile continue pe o mulțime deschisă. Folosindu-ne de această noțiune, vom dezvolta mai departe teoria integrării funcțiilor continue pe mulțimi închise și vom cerceta comportarea integralei, atunci cînd domeniul de integrare variază.

În cazul general, integrala Lebesgue a unei funcții discontinue se construiește cu ajutorul următoarei metode : din domeniul Ω, în care este definită funcția f, se exclude o mulțime σ astfel încît să rămînă o mulțime închisă Ω' pe care funcția să fie continuă. Mai departe, se calculează integrala lui f pe mulțimea închisă Ω'. Trecînd la limită cînd Ω' tinde către Ω, obținem integrala funcției f, pe mulțimea Ω.

În teoria integrării astfel construită, căutăm să păstrăm în mod natural o serie de proprietăți fundamentale ale integralei obișnuite ca de exemplu, posibilitatea integrării termen cu termen a unei sume de mai multe funcții. Aceasta ne obligă să limităm întrucîtva chiar de la primii pași clasa funcțiilor supuse cercetării. Pe această cale ajungem la noțiunile de funcție măsurabilă și funcție sumabilă ; mai departe vom studia tocmai funcțiile sumabile ; pentru ele rămîn valabile proprietățile cele mai importante ale integralei obișnuite.

În această lecție, vom atinge de asemenea chestiunile amintite mai sus din teoria funcțiilor sumabile.

§ 1. Mulțimi de puncte închise și deschise

Înainte de a trece la expunerea teoriei integralei Lebesgue, trebuie să ne oprim asupra unor proprietăți ale mulțimilor de puncte din spațiul cu n dimensiuni.

Să considerăm un spațiu cu n dimensiuni, avînd coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Vom numi mulțime deschisă în acest spațiu o mulțime de puncte M, în care fiecare punct este un punct interior al acestei mulțimi, adică poate fi înconjurat cu o sferă avînd centrul în acest punct și aparținînd în întregime mulțimii M.*

O mulțime deschisă poate fi conexă, adică poate consta dintr-o bucată, însă poate fi și neconexă, fiind formată din bucăți separate în număr finit sau infinit. Obișnuim să numim domeniu orice mulțime deschisă și conexă.

Exemplul 1. Mulțimea tuturor punctelor interioare ale unui paralelipiped dreptunghic definit cu ajutorul inegalităților

$$0 < x_i < a_i \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

este o mulțime deschisă (semnul $<$ nu poate fi înlocuit cu semnul $\leqslant$. Paralelipipedul împreună cu frontiera sa nu este o mulțime deschisă).

Exemplul 2. Mulțimea tuturor punctelor interioare unei anumite sfere, definite cu ajutorul inegalității $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2$, este o mulțime deschisă.

Dacă excludem din această mulțime originea sistemului de coordonate, considerînd numai punctele pentru care

$$0 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2,$$

obținem din nou o mulțime deschisă.

Vom numi suma mai multor mulțimi, sau reuniunea lor, mulțimea tuturor punctelor care aparțin cel puțin uneia din ele. Suma E a mulțimilor E_1 și E_2, o vom nota $E_1 + E_2$ și o vom scrie $E = E_1 + E_2$.

Suma unui număr finit sau infinit de mulțimi deschise este și ea o mulțime deschisă.

Într-adevăr, fiecare punct al unei astfel de sume este un punct interior cel puțin pentru una din mulțimile deschise și prin urmare va fi punct interior și pentru sumă.

În afara mulțimilor deschise, un rol mare îl joacă *mulțimile închise, adică mulțimile care conțin toate punctele lor limită.*

Să dăm exemple de mulțimi închise.

Exemplul 3. Mulțimea tuturor punctelor sferei

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant R^2$$

este o mulțime închisă (semnul $\leqslant$ nu poate fi înlocuit prin semnul $<$).

Exemplul 4. Mulțimea tuturor punctelor paralelipipedului $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este o mulțime închisă.

Exemplul 5. Mulțimea alcătuită dintr-un singur punct $x_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este o mulțime închisă. Într-adevăr, această mulțime nu are puncte limită.

Suma unui număr finit de mulțimi închise este o mulțime închisă. (Pentru un număr infinit de mulțimi, această afirmație nu mai are loc). Demonstrația nu prezintă o mare dificultate și o lăsăm în seama cititorului.

Vom conveni să numim mulțime vidă, mulțimea ideală care nu conține nici un punct. Această convenție ne permite să simplificăm formularea unora dintre teoremele care urmează. Mulțimea vidă o vom considera în același timp și deschisă și închisă.

Fie $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ niște mulțimi în număr finit sau infinit. Vom numi intersecția lor, mulțimea E a tuturor punctelor care aparțin tuturor acestor mulțimi. Cîteodată această intersecție va fi mulțimea vidă. Vom nota intersecția E a mulțimilor $E_1, E_2, \ldots, E_k \ldots$, astfel

$$E = E_1 E_2 E_3 \ldots E_k \ldots \quad \text{sau} \quad E = \prod_k E_k.$$

Intersecția F a unui număr finit sau infinit de mulțimi închise $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$ este o mulțime închisă (în particular ea poate fi vidă). Într-adevăr, un punct limită al mulțimii F este un punct limită pentru fiecare din mulțimile $F_1, F_2, \ldots, F_k$; prin urmare, el aparține tuturor acestora și trebuie să fie conținut în intersecția lor F.

Dacă toate punctele unei anumite mulțimi E_1 aparțin mulțimii E_2, vom spune că E_1 este conținută în E_2, sau este cuprinsă în E_2. Această proprietate se exprimă în mod simbolic, astfel:

$$E_2 \supseteq E_1 \text{ sau } E_1 \subseteq E_2$$

Observație. *Orice mulțime infinită și mărginită în spațiul cu n dimensiuni are totdeauna cel puțin un punct limită.*

Valabilitatea acestei observații se stabilește întocmai ca și în cazul unei singure variabile independente. Într-adevăr, fie $(x_1^{(i)}\ x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$ coordonatele punctului $P^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, aparținînd mulțimii E. Să considerăm mulțimea numerelor $\{x_1^{(i)}\}$ reprezentînd primele coordonate ale punctelor $P^{(i)}$. Această mulțime, fiind infinită și mărginită, are cel puțin un punct limită (în particular, dacă un anumit număr $x_1^{(0)}$ se repetă în șirul nostru de o infinitate de ori, acesta poate fi considerat ca punct limită).

Să alegem din șirul $P^{(i)}$ un subșir $P_1^{(j)}$, astfel încît pentru acesta șirul $x_1^{(j)}$ să aibă o limită. Repetînd acest raționament alegem din $P_1^{(j)}$ un subșir $P_2^{(k)}$ pentru care vor avea limite primele două coordonate, apoi construim șirul $P_3^{(l)}$ ș.a.m.d. După n operații ajungem la șirul $P_n^{(s)}$, pentru care toate coordonatele converg și care, prin urmare, are un punct limită, ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 1. *Dacă un șir F_k de mulțimi închise și mărginite este monoton descrescător, adică*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_k \supseteq \ldots$$

și nici una din mulțimile F_k nu este vidă, atunci nici intersecția lor F nu este vidă.

Într-adevăr, să considerăm șirul de puncte $P_1, P_2, \ldots, \ldots, P_k, \ldots$ unde $P_k \subseteq F_k$. Mulțimea punctelor acestui șir fiind mărginită, trebuie să aibă cel puțin un punct limită. Acest punct, fiind un punct limită pentru fiecare F_k, aparține tuturor F_k și prin urmare este conținut în intersecția lor și de aceea nu mai poate fi vidă, ceea ce trebuia demonstrat.

Este util să observăm că *intersecția unui număr finit de mulțimi deschise*

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_k$$

reprezintă o mulțime deschisă. Într-adevăr, oricare punct din Ω este un punct interior pentru fiecare din mulțimile $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ și în fiecare din ele, el este centrul unei sfere interioare. Cea mai mică din aceste sfere va fi sfera interioară lui Ω.

Fie E_1 și E_2 două mulțimi. Să îndepărtăm din E_1 toate punctele care aparțin intersecției $E_1 E_2$. Mulțimea rămasă o vom numi diferență și o vom nota $E = E_1 - E_2$. Cu ajutorul operației de formare a diferenței vom construi cîteva exemple de mulțimi închise și deschise.

Fie Ω o mulțime deschisă iar F o mulțime închisă. Atunci

$$\Omega_0 = \Omega - F$$

este o mulțime deschisă.

Într-adevăr, dacă lui Ω_0 i-ar aparține un punct, care nu poate fi înconjurat cu o sferă interioară lui Ω_0, atunci în orice vecinătate a sa ar exista puncte, care nu fac parte din Ω, deci care aparțin lui F. Acest punct, fiind un punct limită pentru mulțimea F, ar trebui să aparțină lui F și prin urmare nu ar putea aparține lui $\Omega_0 = \Omega - F$. Contradicția obținută demonstrează afirmația noastră.

Mai departe, $F_0 = F - \Omega$ este o mulțime închisă.

Punctul P, care este punct limită pentru mulțimea F_0, fiind un punct limită de puncte din F, ar fi putut fi exclus din aceasta din urmă numai în cazul în care ar aparține lui Ω. Însă, punctele lui Ω nu pot fi puncte limită pentru F_0, întrucît ele fac parte din Ω împreună cu anumite vecinătăți, care în baza acestui fapt, nu pot conține puncte din F_0. Aceasta înseamnă că nu putem scoate din F, prin scăderea lui Ω, nici un punct limită P al mulțimii F_0 și deci F_0 conține toate punctele sale limită. Astfel, F_0 este o mulțime închisă.

Închiderea $\bar{E}$ a unei mulțimi oarecare E, adică mulțimea obținută prin adăugarea la E a tuturor punctelor sale limită, este o mulțime închisă.

Într-adevăr să presupunem că punctul P_0 este un punct limită pentru șirul de puncte $P_1, P_2, \ldots P_k, \ldots$ din $\overline{E}$. Vom demonstra că punctul P_0 este un punct limită nu numai pentru $\overline{E}$, ci și pentru E și, prin urmare, este conținut în $\overline{E}$. De aici, va rezulta că mulțimea $\overline{E}$ conține toate punctele sale limită și este o mulțime închisă. În interiorul oricărei sfere σ_k de rază $\frac{1}{2^k}$ descrisă în jurul lui P_k, se găsește cel puțin un punct Q_k care aparține lui E.

Șirul Q_k converge, evident, din nou către P_0 și prin urmare P_0 este un punct limită al mulțimii E, ceea ce trebuie demonstrat.

Frontiera C a mulțimii deschise Ω, adică mulțimea punctelor limită a acestei mulțimi deschise, care nu sînt puncte interioare, este o mulțime închisă.

Într-adevăr, conform definiției mulțimii C, avem

$$C = \overline{\Omega} - \Omega,$$

unde $\overline{\Omega}$ este închiderea mulțimii Ω. Conform celor demonstrate mai sus, mulțimea C este închisă.

Cu ajutorul operațiilor considerate asupra mulțimilor de mulțimi închise și deschise, avînd structuri simple, pot fi obținute mulțimi închise cu structuri destul de complicate așa cum arată următoarele două exemple:

Exemplul 6. Mulțimea F_* a tuturor punctelor segmentului închis $[0,1]$, a căror coordonată poate fi scrisă în sistemul zecimal fără utilizarea cifrei 5, este o mulțime închisă. Admitem aici scrierea numărului cu ajutorul unui șir infinit de cifre 9, de exemplu: $0,5 = 0,4999,\ldots$. De aceea, dacă fracția zecimală, care exprimă coordonata unui anumit punct este finită și conține numai un singur 5 în ultima zecimală, acest punct face parte din mulțimea F.

Proprietatea acestei mulțimi de a fi închisă o putem stabili mai ușor dacă observăm că ea poate fi scrisă ca diferența

$$[0,1] - \Omega_*$$

unde $[0,1]$ este segmentul închis, iar Ω_* este o mulțime deschisă alcătuită din toate punctele care aparțin intervalelor deschise Ω_i date prin inegalitățile de forma

$$0,5 < x < 0,6;\ 0,15 < x < 0,16;\ \ldots;$$

$$\Omega_* = \sum \Omega_i.$$

Într-adevăr, fiecare punct, a cărui coordonată nu poate fi scrisă fără ajutorul lui 5 aparține unuia din intervalele Ω_i. Toate intervalele Ω_i sînt mulțimi deschise, de aceea mulțimea Ω_* este de asemenea deschisă și deci F este o mulțime închisă.

O mulțime de puncte E, pentru care oricare ar fi mulțimea deschisă interioară Ω_1 există o submulțime deschisă Ω_2, care nu conține nici un punct E, se numește nicăieri densă. Mulțimea F_* considerată mai sus, după cum se vede, este un exemplu de mulțime închisă, nicăieri densă.

Să considerăm pe o anumită mulțime deschisă o funcție continuă f.

Exemplul 7. Mulțimile $E(f > a)$ și $E(f < a)$, unde a este un număr arbitrar, sînt mulțimi deschise. Să demonstrăm aceasta, de exemplu, pentru $E(f > a)$.

Într-adevăr, dacă într-un punct oarecare P, valoarea funcției continue f este mai mare decît a, atunci într-o sferă suficient de mică din jurul lui P are loc

inegalitatea $f > a$. Prin urmare, mulțimea $E(f > a)$ constă numai din puncte interioare și este deschisă.

Să considerăm acum funcția f continuă pe închiderea $\overline{\Omega}$ a mulțimii deschise Ω:

$$\overline{\Omega} = \Omega + C,$$

unde C este frontiera mulțimii Ω.

Exemplul 8. Mulțimea $E(f \geqslant a)$ și $E(f \leqslant a)$ sînt mulțimi închise, oricare ar fi a. Să facem demonstrația pentru $E(f \geqslant a)$.

Într-adevăr, dacă are loc inegalitatea $f(P_k) \geqslant a$ pentru un șir oarecare de puncte $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ tinzînd către P_0, atunci și $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) \geqslant a$ însă, în baza continuității $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = f(P_0)$ și prin urmare punctul P_0 aparține mulțimii $E(f \geqslant a)$. Aceasta dovedește că mulțimea $E(f \geqslant a)$ este închisă.

În cursul de analiză matematică se consideră funcții definite de regulă într-un domeniu deschis sau închis. Va fi necesar să studiem în cele ce urmează și funcții definite pe mulțimi de o natură mai generală.

O funcție, definită pe o anumită mulțime E, se numește continuă în punctul P^0 făcînd parte din E), pe mulțimea E, dacă oricare ar fi numărul ε pozitiv și arbitrar dat, putem găsi o vecinătate suficient de mică a punctului P_0, astfel încît, pentru orice punct P din mulțimea E aparținînd acestei vecinătăți, are loc inegalitatea

$$|f(P_0) - f(P)| < \varepsilon.$$

Din această definiție rezultă, în particular, că orice funcție este continuă în punctele izolate ale lui E. O funcție continuă în toate punctele unei anumite mulțimi se numește *continuă pe această mulțime.*

Să presupunem că

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots$$

este suma unui număr finit sau infinit de mulțimi deschise. Dacă funcția f, definită pe Ω, este continuă pe fiecare mulțime Ω_k, atunci ea este continuă și pe Ω. Într-adevăr, orice punct din Ω împreună cu o vecinătate oarecare a sa este cuprins într-una din mulțimile Ω_k și este pe această mulțime un punct de continuitate pentru f.

Ne vom opri mai amănunțit asupra funcțiilor definite și continue pe mulțimi închise. Să demonstrăm înainte de toate două teoreme importante.

Teorema 2. (Weierstrass). *O funcție f continuă pe mulțimea mărginită și închisă F, este mărginită pe această mulțime și își atinge acolo atît valoarea sa maximă cît și valoarea sa minimă.*

Să demonstrăm mai întîi că funcția f este mărginită pe mulțimea F. Admițînd contrariul, obținem un șir de puncte aparținînd lui F, în care valorile cresc nemărginit. Acest șir va avea cel puțin un punct limită aparținînd mulțimii F, ținînd seama că aceasta este mărginită și închisă. Să notăm acest punct limită cu P_0. În orice vecinătate a lui P_0, trebuie să fie conținute puncte în care funcția f ia valori oricît de mari în valoare absolută, însă aceasta contrazice continuitatea lui f în punctul P_0 deoarece, conform definiției continuității, pentru punctele P suficient de apropiate de P_0 și aparținînd lui F, trebuie să fie satisfăcută inegalitatea

$$|f(P_0) - f(P)| < \varepsilon$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$.

Astfel, este demonstrat faptul că funcţia f este mărginită pe F. Mulţimea valorilor, pe care le ia funcţia pe F, fiind mărginită, are o margine superioară M şi o margine inferioară m. Vom demonstra acum că funcţia atinge valorile M şi m în anumite puncte ale mulţimii F. Conform definiţiei marginii superioare, trebuie să existe, pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar, un punct P_ε din F astfel încît $M - f(P_\varepsilon) < \varepsilon$. Punînd $\varepsilon = \frac{1}{n}$, obţinem un şir de puncte P_n astfel încît $f(P_n) \to M$ pentru $n \to \infty$. Datorită faptului că F este o mulţime închisă şi mărginită, acest şir P_n are pe F cel puţin un punct limită P_0. În baza continuităţii lui f, are loc în punctul P_0 egalitatea $f(P_0) = M$, ceea ce trebuia demonstrat. Exact la fel se demonstrează că f atinge valoarea sa minimă într-un anumit punct din F.

Teorema 3. (Weierstrass). *O funcţie f, continuă pe o mulţime mărginită şi închisă F, este uniform continuă pe aceasta; cu alte cuvinte, oricare ar fi numărul pozitiv ε, putem găsi un număr $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încît, pentru orice pereche de puncte P, Q, din mulţimea F a căror distanţă este mai mică decît δ, are loc inegalitatea*

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

Dacă numim, ca de obicei, oscilaţia funcţiei pe o anumită mulţime închisă diferenţa dintre valoarea sa cea mai mare şi valoarea sa cea mai mică de pe această mulţime, atunci teorema lui Weierstrass poate fi enunţată şi astfel: *pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încît oscilaţia funcţiei f să nu depăşească pe ε pe intersecţia lui F cu o sferă oarecare de rază $\delta(\varepsilon)$.*

Vom face demonstraţia acestei teoreme prin reducere la absurd. Să presupunem că funcţia f nu este uniform continuă pe F. Există atunci un număr pozitiv ε_0 astfel încît, oricare ar fi $\delta > 0$, putem găsi două puncte P_δ şi Q_δ cu proprietatea ca distanţa dintre ele să fie mai mică decît δ, iar diferenţa valorilor lui f în aceste puncte să fie, în valoarea absolută, mai mare decît ε_0. Punînd $\delta = \frac{1}{n}$ şi alegînd din şirul P_n un subşir P_{n_k}, care converge către un anumit punct P_0 aparţinînd lui F (către acest punct va converge evident şi subşirul corespunzător de puncte Q_n), ajungem la concluzia că în orice vecinătate a punctului P_0, oscilaţia lui f nu este mai mică decît ε_0, iar aceasta contrazice ipoteza continuităţii lui f pe F. Teorema este demonstrată.

Să atragem atenţia asupra unei aplicaţii a teoremelor demonstrate. Fie F o mulţime închisă, iar P_0 un anumit punct fix. Distanţa $r(P, P_0)$ de la punctul variabil P al mulţimii închise F pînă la punctul P_0 reprezintă o funcţie continuă de punctul P pentru punctul dat P_0. Conform primei teoreme a lui Weierstrass, această funcţie îşi atinge minimul. Să punem

$$\delta(P_0) = \min_P r(P, P_0).$$

Numărul $\delta(P_0)$ se numeşte distanţa punctului P_0 la mulţimea închisă F. Dacă P_0 nu aparţine lui F, această distanţă este diferită de zero.

§ 2. Integralele funcţiilor continue pe mulţimi deschise

Aşa cum s-a arătat mai sus, în construcţia noţiunii generale de integrală vom lărgi pas cu pas clasa mulţimilor pentru care aceasta va fi definită. Să începem cu integrarea pe mulţimi deschise.

Să presupunem dată funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, continuă şi nenegativă pe o anumită mulţime deschisă. (Se înţelege că aceasta nu trebuie să fie numaidecît mărginită şi uniform continuă, ca de exemplu funcţia

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}$$

în domeniul $0 < r < 1$ obţinut prin excluderea originii sistemului de coordonate din sfera deschisă $0 \leqslant r < 1$).

Să descompunem întregul spaţiu în celule cubice $F_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ avînd latura h. Celula $F_{k_1, k_2 \ldots, k_n}$ este determinată de inegalităţile

$$k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1) h \qquad (i = 1, 2 \ldots, n),$$

unde k_i sînt numere întregi. O asemenea subdiviziune o numim *reţea*.

Să alcătuim acum dintr-un număr finit de cuburi ale reţelei o anumită mulţime Φ_h care să se găsească în întregime în interiorul lui Ω. O asemenea mulţime o numim *mulţime-reţea interioară* sau pe scurt, *reţea interioară*. Vom micşora pe h subîmpărţind fiecare cub al reţelei într-un număr întreg de cuburi mai mici şi vom construi din nou o mulţime-reţea interioară. Un sistem de reţele interioare este numit *exhaustiv*, dacă sînt satisfăcute următoarele două condiţii:

a) Şirul Φ_h este monoton crescător, cu alte cuvinte

$$\Phi_{h_1} \subseteq \Phi_{h_2} \subseteq \ldots \subseteq \Phi_{h_k} \subseteq \ldots;$$

b) Începînd de la un anumit k, fiecare punct al domeniului Ω este strict conţinut în interiorul tuturor mulţimilor Φ_{h_k}.

Să observăm că pentru orice mulţime deschisă există cel puţin un sistem exhaustiv de reţele interioare.

Într-adevăr, construind o reţea interioară, putem include în ea toate cuburile reţelei din spaţiu, care se găsesc împreună cu frontierele lor în interiorul lui Ω. Sistemul de mulţimi-reţea interioare, obţinut pe această cale, va fi exhaustiv. Într-adevăr, orice punct P_0 din mulţimea Ω poate fi înconjurat cu o sferă mică σ aparţinînd lui Ω. Prin urmare, pentru o reţea suficient de fină, cînd cea mai mare diagonală a cubului cu muchea h devine mai mică decît raza sferei σ, unul dintre cuburi va fi cuprins împreună cu punctul P_0 în Φ_h, ceea ce trebuia demonstrat.

Să punem

$$J_k = \int \ldots \int_{\Phi_{h_k}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

unde Φ_{h_k} formează un sistem exhaustiv de mulţimi-reţele. Datorită faptului că funcţia f este nenegativă, mărimea J_k este nedescrescătoare odată cu creşterea lui k. Dacă şirul J_k rămîne mărginit cînd $k \to \infty$, este evident că acest şir tinde către o anumită limită, Această limită o vom numi *integrala funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ extinsă la domeniul Ω*:

$$\int \ldots \int_{\Omega} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int \ldots \int_{\Phi_{h_k}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Vom demonstra că această limită nu depinde de modul în care a fost ales sistemul exhaustiv şi nici de alegerea axelor de coordonate în spaţiu.

Integrala

$$\int_{\Omega} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

o vom scrie mai scurt sub forma

$$\int_{\Omega} f\, dv \quad \text{sau} \quad \int_{\Omega} f\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Observaţia 1. O funcţie f nenegativă, mărginită şi continuă pe o mulţime mărginită şi deschisă Ω, este integrabilă pe această mulţime. Într-adevăr, integralele extinse la sisteme exhaustive de mulţimi-reţele sînt mărginite în ansamblul lor şi prin urmare tind către o anumită limită.

Lema 1. *Să considerăm un sistem de mulţimi deschise monoton crescător*

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots \subseteq \Omega_k \subseteq \dots$$

şi fie $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_k + \dots$. *Atunci, orice mulţime închisă şi mărită* F, *cuprinsă în întregime în interiorul lui* Ω, *va fi conţinută în toate mulţimile* Ω_k, *începînd de la un anumit rang* k.

În adevăr, să presupunem că afirmaţia lemei n-ar fi exactă. Am putea găsi atunci oricare ar fi k, un punct P_k, aparţinînd lui F, fără să aparţină lui Ω_k. Mulţimea punctelor P_k are cel puţin un punct limită P_0, aparţinînd evident lui F. Este uşor de văzut că P_0 nu aparţine niciunui Ω_k, deoarece, în orice vecinătate a sa, există puncte P_k cu indici k oricît de mari. Aceasta însă nu este posibil deoarece mulţimea F aparţine sumei Ω şi prin urmare trebuie să aparţină unuia din termenii sumei Ω. Contradicţia obţinută demonstrează lema.

Să arătăm acum că integrala pe o mulţime deschisă un depinde nici de direcţia axelor de coordonate din spaţiu şi nici de felul în care au fost alcătuite sistemele exhaustive de mulţimi-reţele interioare.

Să considerăm mulţimile deschise Ω_k alcătuite din toate punctele interioare mulţimilor Φ_{h_k}. Suma acestor mulţimi deschise este mulţimea deschisă Ω, ceea ce înseamnă că orice mulţime închisă F, care se găseşte în interiorul lui Ω, va fi conţinută în toate mulţimile-reţele Φ_{h_k}, începînd de la un anumit k. Fie Φ_{h_k} şi ψ_{h_k} două sisteme exhaustive de mulţimi-reţele, care nu sînt date obligatoriu într-un acelaşi sistem de coordonate. În baza lemei 1, pentru o alegere convenabilă a indicilor $k_2 = k_2(k_1)$ şi $k_3 = k_3(k_2)$, vom avea, oricare ar fi k_1

$$\Phi_{h_{k_1}} \subseteq \Psi_{h_{k_2}} \subseteq \Phi_{h_{k_3}}$$

Prin urmare,

$$\int_{\Phi_{h_{k_1}}} f\, dv \leqslant \int_{\Psi_{h_{k_2}}} f\, dv \leqslant \int_{\Phi_{h_{k_3}}} f\, dv,$$

de unde se vede că limitele pe sistemele Φ_h şi Ψ_h sînt egale. Independenţa integralei de alegerea sistemului exhaustiv de mulţimi-reţea şi de direcţia axelor de coordonate este demonstrată.

Orice funcţie nenegativă, integrabilă pe o mulţime deschisă Ω este integrabilă pe orice submulţime a sa deschisă Ω_1. Într-adevăr integralele extinse la sistemul exhaustiv de mulţimi-reţele pentru Ω_1 vor fi majorate de integralele extinse la mulţimile-reţele corespunzătoare construite pentru Ω, de aceea, acestea formează un şir mărginit şi prin urmare convergent.

Observaţia 2. *Dacă* $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ *şi funcţia* f *este nenegativă, atunci*

$$\int_{\Omega_2} f\, dv \leqslant \int_{\Omega_1} f\, dv$$

Într-adevăr, putem lua mulţimile exhaustive pentru Ω_2 astfel încît acestea să fie cuprinse în mulţimile exhaustive pentru Ω_1.

Observaţia 3. *Dacă* f_1 *şi* f_2 *sînt două funcţii oarecare nenegative, continue şi integrabile pe* Ω, *suma lor* $f_1 + f_2$ *este de asemenea integrabilă pe* Ω, şi

$$\int_{\Omega} (f_1 + f_2)\, dv = \int_{\Omega} f_1\, dv + \int_{\Omega} f_2\, dv.$$

Demonstrarea acestei afirmaţii nu prezintă nici o dificultate. Ea se poate obţine prin trecere la limită din următoarea egalitate evidentă

$$\int_{\Phi_h} (f_1 + f_2)\, dv = \int_{\Phi_h} f_1\, dv + \int_{\Phi_h} f_2\, dv.$$

Observaţia 4. *Dacă* f *este o funcţie nenegativă, continuă şi integrabilă pe* Ω, *atunci şi* af *posedă aceste proprietăţi pentru* $a \geqslant 0$

$$\int_{\Omega} af\, dv = a \int_{\Omega} f\, dv.$$

Demonstraţia acestei afirmaţii nu prezintă de asemenea nici o dificultate.

Teorema 4. *Fie* Ω_1 *şi* Ω_2 *două mulţimi deschise care se pot intersecta una cu alta şi fie* f *o funcţie continuă, nenegativă pe mulţimea* $\Omega_1 + \Omega_2$ *şi integrabilă pe această mulţime. Atunci este valabilă relaţia*

$$\int_{\Omega_1} f\, dv + \int_{\Omega_2} f\, dv = \int_{\Omega_1 + \Omega_2} f\, dv + \int_{\Omega_1 \Omega_2} f\, dv. \qquad \text{(VI,1)}$$

Să construim în Ω_1 şi Ω_2 mulţimile-reţea exhaustive $\Phi_h^{(1)}$ şi $\Phi_h^{(2)}$. Este evident

$$\int_{\Phi_h^{(1)}} f\, dv + \int_{\Phi_h^{(2)}} f\, dv = \int_{\Phi_h^{(1)} + \Phi_h^{(2)}} f\, dv + \int_{\Phi_h^{(1)} \Phi_h^{(2)}} f\, dv. \qquad \text{(VI,2)}$$

Este uşor de văzut că mulţimile $\Phi_h^{(1)} + \Phi_h^{(2)}$ formează un sistem exhaustiv pentru mulţimea $\Omega_1 + \Omega_2$, deoarece fiecare punct al acestei mulţimi ajunge mai

devreme sau mai tîrziu într-una din mulțimile $\Phi_h^{(1)}$ sau $\Phi_h^{(2)}$, iar $\Phi_h^{(1)}\,\Phi_h^{(2)}$ formează un sistem exhaustiv pentru $\Omega_1\Omega_2$ întrucît fiecare punct al acestei mulțimi ajunge la un moment dat în ambele mulțimi-rețele $\Phi_h^{(1)}$ și $\Phi_h^{(2)}$. De aceea, trecînd la limită în (VI.2) obținem (VI.1). Teorema este demonstrată.

Consecință. *Integrala unei funcții nenegative extinsă la o sumă formată dintr-un număr finit de mulțimi deschise nu depășește suma integralelor extinse la toate aceste mulțimi:*

$$\int_{\Omega} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_1} f\,dv + \int_{\Omega_2} f\,dv + \ldots + \int_{\Omega_k} f\,dv.$$

De aici rezultă că, dacă toate integralele extinse la mulțimile deschise Ω_k există, atunci există și integrala extinsă la Ω.

Teorema 5. *Să considerăm șirul monoton crescător de mulțimi deschise*

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \Omega_k \subseteq \ldots$$

Să notăm cu Ω_0 *suma lor*

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots.$$

Fie f *o funcție arbitrară nenegativă, continuă și integrabilă pe* Ω_0. Atunci,

$$\int_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv.$$

Demonstrație. Este evident că avem

$$\int_{\Omega_0} f\,dv \geqslant \int_{\Omega_k} f\,dv,$$

de aceea

$$\int_{\Omega_0} f\,dv \geqslant \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv. \qquad (*)$$

Să construim sistemul exhaustiv de mulțimi-rețele Φ_h pentru mulțimea deschisă Ω_0. În baza lemei 1, fiecare din aceste mulțimi-rețele va fi cuprinsă în întregime într-un anumit Ω_n.

Vom avea, prin urmare,

$$\int_{\Phi_h} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_n} f\,dv \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv$$

și trecînd la limită pentru $h \to 0$, obținem

$$\int_{\Omega_0} f\,dv \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv.$$

Comparînd această inegalitate cu (*), avem

$$\int_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Consecință. *Să considerăm un șir de mulțimi deschise* $\Omega_1, \Omega_2 \ldots, \Omega_k, \ldots$ *(nu neapărat monoton crescător) și o funcție arbitrară nenegativă și continuă. Dacă sumele*

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega_k} f\,dv$$

sînt mărginite în ansamblul lor, atunci există integrala extinsă la suma Ω_0 *a mulțimilor* Ω_k *și este valabilă inegalitatea*

$$\int_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k} f\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \left[\int_{\Omega_1} f\,dv + \int_{\Omega_2} f\,dv + \ldots + \int_{\Omega_k} f\,dv. \right].$$

Observația 5. Fie Ω o mulțime deschisă, Φ_k o mulțime-rețea, conținută în aceasta, iar f o funcție nenegativă, continuă și integrabilă pe Ω. Atunci,

$$\int_{\Omega - \Phi_h} f\,dv + \int_{\Phi_h} f\,dv = \int_{\Omega} f\,dv.$$

Pentru demonstrație este suficient să luăm pentru $\Omega - \Phi_k$ un sistem exhaustiv oarecare Ψ_k și să ne convingem că mulțimile $\Psi_k + \Phi_k$ formează un sistem exhaustiv pentru Ω.

O importanță deosebită are următoarea teoremă.

Teorema 6. *Să considerăm șirul monoton descrescător de mulțimi deschise* $\Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq \ldots \supseteq \Omega_k \supseteq \ldots$ *și să presupunem că intersecția lor este de asemenea o mulțime deschisă (în particular aceasta poate fi și mulțimea vidă):* $\Omega_0 = \Omega_1\,\Omega_2 \ldots \Omega_k \ldots$. *Fie* f *o funcție continuă, nenegativă și integrabilă pe* Ω_1. *Atunci,*

$$\int_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv.$$

(dacă Ω_0 *este mulțimea vidă, această limită este nulă).*

Demonstrație. Să punem în corespondență fiecărei mulțimi Ω^* o mulțime-rețea interioară $\Phi_h^{(k)}$ astfel încît să aibă loc inegalitatea

$$\int_{\Omega_k} f\,dv - \int_{\Phi_h^{(k)}} f\,dv < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Să alcătuim mulțimea deschisă $\Omega_k' = \Omega_k - \Phi_h^{(k+1)}$. Nu este greu de văzut că mulțimea deschisă Ω_1 coincide cu suma

$$\Omega_0 + \Omega_1' + \ldots + \Omega_k' + \ldots$$

În baza consecinței de la teorema 4, avem

$$\int_{\Omega_1} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_0} f\,dv + \int_{\Omega_1'} f\,dv + \ldots + \int_{\Omega_k'} f\,dv + \ldots$$

Însă, conform alegerii lui $\Phi_h^{(k+1)}$ și a observației 5, avem

$$\int_{\Omega_k'} f\,dv = \int_{\Omega_k} f\,dv - \int_{\Phi_h^{(k+1)}} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_k} f\,dv - \int_{\Omega_{k+1}} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

și deci

$$\int_{\Omega_1} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_0} f\,dv + \left(\int_{\Omega_1} f\,dv - \int_{\Omega_2} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^2}\right) + \left(\int_{\Omega_2} f\,dv - \int_{\Omega_3} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\int_{\Omega_k} f\,dv - \int_{\Omega_{k+1}} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) + \ldots =$$

$$= \int_{\Omega_0} f\,dv + \lim_{k\to\infty}\left(\int_{\Omega_1} f\,dv - \int_{\Omega_k} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

de unde

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv \leqslant \int_{\Omega_0} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teorema rezultă acum din faptul evident

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv \geqslant \int_{\Omega_0} f\,dv.$$

În acest paragraf au fost considerate numai funcțiile nenegative. Vom arăta în § 4 că integrarea funcțiilor de semn variabil se reduce la integrarea funcțiilor nenegative. Acest lucru va fi demonstrat pentru o integrală mai generală și anume pentru integrala Lebesgue al cărui caz particular sînt integralele funcțiilor continue pe mulțimi deschise (§ 2) și închise (§ 3).

§ 3. Integralele funcțiilor continue pe mulțimii mărginite și închise

Vom trece acum la definirea noțiunii de integrală a unei funcții continue extinsă la o mulțime închisă mărginită. Este natural să facem aceasta în modul următor. Să considerăm funcția f definită pe o anumită mulțime închisă și mărginită F și continuă pe aceasta. Vom include pe F într-o anumită mulțime deschisă. Să presupunem că am reușit să prelungim în mod continuu funcția f pe mulțimea deschisă Ω, f fiind integrabilă pe această mulțime. Să formăm mulțimea deschisă $\Omega - F$. Atunci, conform definiției, punem

$$\int_F f\,dv = \int_\Omega f\,dv - \int_{\Omega-F} f\,dv.$$

În această definiție rămîn totuși încă multe lucruri nedemonstrate. Nu este clar, înainte de toate, că putem prelungi totdeauna în mod continuu funcția f și că, în acel caz, obținem o funcție integrabilă; în al doilea rînd nu se știe dinainte dacă o asemenea definiție a integralei conduce la un rezultat unic determinat.

Pentru a arăta că definiția noastră este corectă, vom demonstra întîi cîteva propoziții ajutătoare.

Fie f o funcție arbitrară nenegativă, continuă și integrabilă pe mulțimea deschisă Ω_1. Să presupunem, mai departe, că Ω este conținut în Ω_1 și că F este o mulțime închisă, cuprinsă în Ω. Vom avea

$$\Omega + (\Omega_1 - F) = \Omega_1, \quad \Omega(\Omega_1 - F) = \Omega - F.$$

De aici, în baza teoremei 4, avem

$$\int_\Omega f\,dv + \int_{\Omega_1-F} f\,dv = \int_{\Omega_1} f\,dv + \int_{\Omega-F} f\,dv$$

și deci

$$\int_\Omega f\,dv - \int_{\Omega-F} f\,dv = \int_{\Omega_1} f\,dv - \int_{\Omega_1-F} f\,dv.$$

Să presupunem că f este o funcție nenegativă, continuă și integrabilă pe mulțimile deschise Ω_1 și Ω_2 și că $F \subseteq \Omega_1\Omega_2$. Să punem $\Omega = \Omega_1\Omega_2$. Conform celor demonstrate, avem

$$\int_\Omega f\,dv - \int_{\Omega-F} f\,dv = \int_{\Omega_1} f\,dv - \int_{\Omega_1-F} f\,dv = \int_{\Omega_2} f\,dv - \int_{\Omega_2-F} f\,dv.$$

Am obținut următorul rezultat important:

Diferența

$$\int_\Omega f\,dv - \int_{\Omega-F} f\,dv$$

nu depinde de alegerea mulțimii deschise Ω.

Lema 2. *Să presupunem că funcţia continuă f se anulează în punctele unei anumite mulţimi închise şi mărginite F, care se găseşte în interiorul mulţimii deschise Ω; atunci,*

$$\int_{\Omega} f\,dv = \int_{\Omega - F} f\,dv.$$

Să presupunem la început că mulţimea Ω este mărginită.
În baza celor spuse mai sus, (v. observaţia 2 § 2. Lecţia VI)

$$\int_{\Omega - F} f\,dv \leqslant \int_{\Omega} f\,dv. \qquad (**)$$

Vom considera mulţimea deschisă Ω_ε a acelor puncte în care $f < \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv mic. Folosindu-ne de faptul că mulţimea Ω este mărginită şi că, prin urmare, toate mulţimile Ω_ε sînt de asemenea mărginite, vom avea

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{\Omega_\varepsilon} f\,dv = 0.$$

În baza consecinţei din teorema 4, avem

$$\int_{\Omega} f\,dv \leqslant \int_{\Omega - F} f\,dv + \int_{\Omega_\varepsilon} f\,dv$$

şi deci

$$\int_{\Omega - F} f\,dv \geqslant \int_{\Omega} f\,dv.$$

Comparînd aceasta cu (**), obţinem lema noastră.

În cazul general, considerăm mulţimea Ω ca fiind suma unor mulţimi Ω_k monoton crescătoare, deschise şi mărginite. Trecînd la limită pentru $k \to \infty$, în egalitatea

$$\int_{\Omega_k} f\,dv = \int_{\Omega_k - F} f\,dv,$$

obţinem afirmaţia care trebuia demonstrată.

Dacă două funcţii f_1 şi f_2 coincid în toate punctele unei mulţimi închise F, are loc egalitatea

$$\int_{\Omega} f_1\,dv - \int_{\Omega - F} f_1\,dv = \int_{\Omega} f_2\,dv - \int_{\Omega - F} f_2\,dv.$$

Într-adevăr din lema 2, rezultă egalitatea echivalentă

$$\int_{\Omega} (f_1 - f_2)\,dv = \int_{\Omega - F} (f_1 - f_2)\,dv.$$

Afirmaţia demonstrată înseamnă că integrala definită mai sus a funcţiei f, continuă pe mulţimea închisă F şi calculată pe această mulţime F, nu depinde de metoda de prelungire a lui f în exteriorul lui F. Ne rămîne să stabilim încă posibilitatea acestei prelungiri.

Lema 3. *Să considerăm mulţimea deschisă Ω avînd frontiera C. Fie F o mulţime închisă şi care se găseşte în mulţimea $\Omega + C$. Să mai presupunem definită pe F o funcţie arbitrară f continuă şi nenegativă. Putem, atunci, construi pe $\Omega + C$ o funcţie φ continuă şi nenegativă şi care să coincidă cu f în punctele lui F. Valorile maximă şi minimă ale lui φ sînt egale respectiv cu valorile maximă şi minimă ale lui f.*

Aşa cum s-a arătat la § 1 teorema 3 Lecţia IV, fiecare punct P al domeniului Ω, care nu aparţine lui F, se găseşte la o distanţă pozitivă finită $\delta(P)$ de la mulţimea F. Să construim sfera de rază R avînd centrul în punctul dat P şi să considerăm valoarea maximă pe care o poate lua funcţia f în această sferă.

Să presupunem

$$\max_{r \leqslant R} f = M_P(R).$$

Dacă în interiorul sferei nu avem puncte din F, vom considera $M_P(R) = 0$. $M_P(R)$ este o funcţie monoton crescătoare şi prin urmare integrabilă în sensul obişnuit al cuvîntului [1]).

Putem considera ca funcţie φ, de exemplu,

$$\varphi(P) = \frac{1}{\delta(P)} \int_{\delta(P)}^{2\delta(P)} M_P(R)\,dR.$$

În punctele mulţimii F vom pune $\varphi(P) = f(P)$.

Să demonstrăm că funcţia $\varphi(P)$, astfel definită, este continuă. Într-adevăr, în punctul P_1, care se găseşte la distanţa $\delta > 0$ de punctul P_0 al mulţimii F, valoarea acestei funcţii este cuprinsă între

$$\min_{r \leqslant 3\delta} f(P) \text{ şi } \max_{r \leqslant 3\delta} f(P)$$

în sfera cu raza 3δ şi centrul în punctul P_0 şi prin urmare $f(P_1)$ tinde către $f(P_0)$ pentru $\delta \to 0$, în baza continuităţii lui f.

Pentru două puncte P_1 şi P_2, la distanţa h unul de altul şi care nu fac parte din F, avem

$$M_{P_1}(R) \leqslant M_{P_2}(R + h) \quad \text{şi} \quad \delta(P_1) \leqslant \delta(P_2) + h,$$
$$M_{P_2}(R) \leqslant M_{P_1}(R + h) \quad \text{şi} \quad \delta(P_2) \leqslant \delta(P_1) + h.$$

[1]) Vezi de exemplu, *V. I. Smirnov*, Curs de matematici superioare, vol. I, ag. 282, ediaţia 11, L. — M.1948.

Vom considera $h < \min\left\{\frac{\delta(P_1)}{3}\ ;\ \frac{\delta(P_2)}{3}\right\}$; atunci,

$$\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \frac{1}{\delta(P_1)} \int_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)dR - \frac{1}{\delta(P_2)} \int_{\delta(P_2)}^{2\delta(P_2)} M_{P_2}(R)\,dR \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta(P_1)} \int_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR - \frac{1}{\delta(P_1)+h} \int_{\delta(P_1)+h}^{2\delta(P_1)-2h} M_{P_1}(R-h)dR =$$

$$= \frac{1}{\delta(P_1)} \int_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(R)\,dR + \frac{1}{\delta(P_1)} \int_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR -$$

$$- \frac{1}{\delta(P_1)+h} \int_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(y)\,dy =$$

$$= \frac{h}{\delta(P_1)[\delta(P_1)+h]} \int_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(R)dR +$$

$$+ \frac{1}{\delta(P_1)} \int_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR \leqslant \frac{h}{[\delta(P_1)]^2} \int_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)dR +$$

$$+ \frac{1}{\delta(P_1)} \int_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR \leqslant \frac{4hM}{\delta(P_1)},$$

unde $M = \max f \geqslant M_P(R)$.

Pentru un h suficient de mic, această mărime este oricît de mică vrem noi, ceea ce înseamnă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ fiind dat, avem, pentru h suficient de mic, $\varphi(P_1) - \varphi(P_2) < \varepsilon$. Punctele P_1 și P_2 se bucură însă de aceleași proprietăți, de aceea este valabilă de asemenea inegalitatea $\varphi(P_2) - \varphi(P_1) < \varepsilon$. De aici, rezultă continuitatea lui $\varphi(P)$ și lema este demonstrată.

Observăm că și cazul, în care funcția f ia valori de semne diferite, poate fi redus ușor la cel precedent, dacă se ia în locul funcției f, funcția $f + c$, unde c este un număr constant pozitiv suficient de mare.

Noțiunea de integrală pe o mulțime închisă este astfel pe deplin stabilită. Am demonstrat în același timp că orice funcție nenegativă f, continuă pe o mulțime închisă și mărginită F, este integrabilă pe această mulțime. Într-adevăr, dacă ne vom folosi, în baza teoremei lui Weierstrass, de faptul că funcția f este mărginită, atunci aplicarea directă a lemei 3 stabilește integrabilitatea lui f. Pentru asemenea mulțimi închise, ca de exemplu paralelipipedele sau mulțimile-rețele, definiția

noastră a integralei coincide în întregime cu definiția obișnuită a integralei lui Riemann pentru funcțiile continue.

Este valabilă următoarea teoremă.

Teorema 7. *Fie F_1 și F_2 două mulțimi mărginite și închise și f o funcție negativă continuă pe fiecare din ele. Atunci,*

$$\int_{F_1} f\,dv + \int_{F_2} f\,dv = \int_{F_1+F_2} f\,dv + \int_{F_1F_2} f\,dv.$$

Această teoremă se reduce ușor la teorema 4, dacă includem $F_1 + F_2$ în domeniul Ω și notăm $\Omega - F_1 = \Omega_1$, $\Omega - F_2 = \Omega_2$. Luînd în considerare

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega - F_1F_2,$$

$$\Omega_1\Omega_2 = \Omega - (F_1 + F_2),$$

obținem

$$\left.\begin{aligned} \int_{F_1} f\,dv &= \int_{\Omega} f\,dv - \int_{\Omega_1} f\,dv\,; \quad \int_{F_2} f\,dv = \int_{\Omega} f\,dv - \int_{\Omega_2} f\,dv\,; \\ \int_{F_1+F_2} f\,dv &= \int_{\Omega} f\,dv - \int_{\Omega_1\Omega_2} f\,dv\,; \quad \int_{F_1F_2} f\,dv = \int_{\Omega} f\,dv - \int_{\Omega_1+\Omega_2} f\,dv. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI, 3)}$$

Din formulele (VI, 1) și (VI, 3), rezultă teorema noastră.

Teorema 8. *Fie $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_k \supseteq \ldots$ un șir monoton descrescător de mulțimi mărginite și închise. Să notăm cu F_0 intersecția lor: $F_0 = F_1F_2\ldots F_k\ldots$, Fie de asemenea f o funcție arbitrară nenegativă și continuă pe F_1. Atunci,*

$$\int_{F_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{F_k} f\,dv.$$

Această teoremă se reduce la teorema 5 din paragraful precedent, dacă prelungim pe f pe mulțimea deschisă Ω conținînd pe F_1 și dacă punem $\Omega_k = \Omega - F_k$. Atunci, punînd încă

$$\Omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots,$$

vom avea

$$\Omega - \Omega_0 = F_0,$$

$$\int_{Fk} f\,dv = \int_{\Omega} f\,dv - \int_{\Omega_k} f\,dv \quad (k = 1,2,\ldots).$$

Folosindu-ne de teorema 5 din § 2, și trecînd la limită, demonstrăm propoziția noastră.

Teorema 9. *Dacă intersecția șirului monoton descrescător de mulțimi deschise*

$$\Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq \ldots \supseteq \Omega_k \supseteq \ldots$$

este o mulțime închisă F:

$$F = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_k \dots,$$

atunci,

$$\int_F f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f\,dv.$$

Într-adevăr, fie

$$\Omega_k' = \Omega_k - F,$$

atunci,

$$\int_F f\,dv = \int_{\Omega_k} f\,dv - \int_{\Omega_k'} f\,dv.$$

Trecînd la limită în ambele părți ale egalității și observînd că

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k'} f\,dv = 0$$

în baza teoremei 6, deoarece intersecția Ω_k' este vidă, obținem $\int_F f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f dv$. ceea ce trebuia demonstrat. Să observăm că orice mulțime închisă F poate fi reprezentată totdeauna ca o intersecție de mulțimi deschise Ω_k, cuprinse una în alta, într-adevăr, putem lua drept Ω_k mulțimea punctelor a căror distanță pînă la mulțimea închisă F, este mai mică decît ε_k, unde $\varepsilon_k \to 0$ pentru $k \to \infty$. Este evident că intersecția unor astfel de mulțimi Ω_k va conține numai puncte a căror distanță pînă la F este nulă și prin urmare va coincide cu mulțimea închisă F.

Teorema 10. *Să considerăm șirul monoton crescător de mulțimi închise* $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_k \subseteq \dots$ *și să presupunem că suma lor* E *este o mulțime închisă sau deschisă. Fie* f *o funcție nenegativă, continuă pe toate mulțimile* F_k *și pe* E, *integrabilă pe* E, *dacă* E *este o mulțime deschisă. Atunci,*

$$\int_E f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{F_k} f\,dv.$$

Teorema se reduce la cea precedentă în cazul unei mulțimi deschise $E = \Omega$ dacă trecem la considerarea mulțimilor deschise $\Omega_k = \Omega - F_k$, și la teorema 6' dacă mulțimea $E = F$ este închisă.

Să considerăm acum cazul particular $f = 1$.

Vom numi integralele

$$\int_\Omega dv \quad \text{și} \quad \int_F dv$$

respectiv măsura Lebesgue a mulțimii deschise Ω sau a mulțimii închise F. Vom nota măsura mulțimii F, deschise sau închise cu

$$m\Omega \text{ sau } mF.$$

Toate teoremele despre integrale demonstrate mai sus, fiind aplicabile cazului $f = 1$, ne dau dintr-o dată teoreme analoge referitoare la măsura mulțimilor deschise sau închise. Măsura este generalizarea naturală a volumului. Vom reveni asupra proprietăților măsurii.

Pentru aplicații este importantă următoarea teoremă.

Teorema 11. (A mediei). *Fie* E *o mulțime închisă sau deschisă, pe care funcția* f *este continuă. In cazul cînd* E *este o mulțime deschisă, vom presupune că* E *are o măsură finită și că* f *este integrabilă pe* E. *Să presupunem că peste tot în* E *sînt îndeplinite inegalitățile*

$$M_1 \leqslant f \leqslant M_2,$$

unde M_1 *și* M_2 *sînt constante. Atunci,*

$$M_1 m E \leqslant \int_E f\,dv \leqslant M_2 m E.$$

Demonstrația acestei teoreme este evidentă: ea se obține din faptul că

$$\int_E (f - M_1)\,dv \geqslant 0, \quad \int_E (M_2 - f)\,dv \geqslant 0.$$

§ 4. Funcții sumabile

Să trecem la studiul teoriei generale a integralei Lebesgue.

Fie f o funcție oarecare nenegativă și definită pe o mulțime Ω mărginită și deschisă. Să considerăm toate mulțimile închise F pe care este continuă funcția f și să determinăm marginea superioară a integralelor lui f extinse la mulțimile F

$$\sup_F \int_F f\,dv.$$

Vom numi această margine superioară, dacă există și este finită, *integrala interioară a funcției* f *pe mulțimea* Ω și o vom nota cu

$$(\text{int}) \int_\Omega f\,dv.$$

Noțiunea de integrală interioară capătă o însemnătate deosebită în acele cazuri în care mulțimile închise F, pe care funcția f este continuă, au o măsură suficient de mare.

Funcția f, *definită pe o mulțime* Ω *oarecare, mărginită și deschisă, se numește măsurabilă, dacă există mulțimi închise* F *și avînd măsură oricît de apropiată de măsura lui* Ω *și pe care* f *este continuă*

$$m\Omega - mF_\delta \leqslant \delta,$$

unde δ *este un număr pozitiv arbitrar.*

Dacă funcţia f nenegativă şi măsurabilă are pe mulţimea deschisă Ω o integrală interioară, ea se numeşte *sumabilă* sau *integrabilă în sensul lui Lebesgue*, iar integrala sa interioară se numeşte *integrala Lebesgue* sau pur şi *simplu integrală*. În acest caz, ne vom folosi de notaţia obişnuită a integralei.

Aşa cum vom arăta mai departe, integrala Lebesgue posedă o serie întreagă de proprietăţi foarte importante, care simplifică extraordinar de mult folosirea ei. Următorul exemplu simplu arată că pentru funcţiile care nu sînt măsurabile, integrala interioară, chiar atunci cînd există, nu posedă proprietăţile cele mai importante ale integralei obişnuite.

Să considerăm o funcţie f pozitivă însă nu măsurabilă pe mulţimea deschisă Ω, avînd pe această mulţime o integrală interioară. (Putem arăta că asemenea funcţii există).

Datorită faptului că funcţia f nu este măsurabilă, mulţimile închise pe care f este continuă, au o măsură considerabil mai mică decît $m\Omega$, adică

$$\sup_F mF = a < m\,\Omega.$$

Este evident că mulţimile închise, pe care f şi $f+1$ sînt continue, vor fi aceleaşi. Pentru oricare din ele, avem

$$\int_F (f+1)\,dv - \int_F f\,dv = mF.$$

(v. observaţia 3 de la § 2, Lecţia VI)

De aici,

$$\int_F (f+1)\,dv = \int_F f\,dv + mF \leqslant \sup_{F_1} \int_{F_1} f\,dv + a$$

şi

$$(\text{int}) \int_\Omega (f+1)\,dv \leqslant (\text{int}) \int_\Omega f\,dv + a.$$

Ultima inegalitate arată că pentru integrala interioară a funcţiilor, care nu sînt măsurabile, nu este îndeplinită, în genere, proprietatea de aditivitate

$$(\text{int}) \int_\Omega (f+1)\,dv \neq (\text{int}) \int_\Omega f\,dv + (\text{int}) \int_\Omega 1\,dv,$$

deoarece $(\text{int}) \int_\Omega 1\,dv = m\,\Omega > a.$

Observaţie. Lema 3 din § 3 ne permite să dăm o altă formulare condiţiei de măsurabilitate: funcţia f este măsurabilă pe mulţimea deschisă Ω atunci şi numai atunci, cînd există funcţii continue f_k, care coincid cu f pe mulţimile închise F_k şi avînd măsura oricît de apropiată de măsura lui Ω.

Lema 4. *Fie f o funcţie măsurabilă nenegativă pe mulţimea mărginită şi deschisă Ω şi fie F_ε un sistem oarecare de mulţimi închise, pe care f este continuă, astfel încît*

$$m\,\Omega - m\,F_\varepsilon < \varepsilon.$$

Dacă există limita finită

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{F_\varepsilon} f\,dv,$$

atunci funcţia f este sumabilă, iar această limită este egală cu $\int_\Omega f\,dv$.

Dacă cel puţin una din aceste afirmaţii ar fi falsă, ar avea loc inegalitatea

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{F_\varepsilon} f\,dv < \sup_F \int_F f\,dv,$$

deoarece conform definiţiei, sau $\sup_F \int_F f\,dv = \infty$, sau $\sup_F \int_F f\,dv = \int_\Omega f\,dv$. Am fi putut, prin urmare, găsi o mulţime închisă F_0, astfel încît, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, să aibă loc inegalitatea

$$\int_{F_0} f\,dv - \int_{F_\varepsilon} f\,dv \geqq \eta > 0,$$

în care f este continuă pe F_0, iar η nu depinde de ε. Să punem $F'_\varepsilon = F_0 F_\varepsilon$. Întărind inegalitatea precedentă, obţinem

$$\int_{F_0} f\,dv - \int_{F'_\varepsilon} f\,dv \geqslant \eta > 0.$$

Funcţia f este mărginită pe F_0. Să presupunem că $f \leqslant M$. Avem

$$\int_{F_0} f\,dv - \int_{F'_\varepsilon} f\,dv = \left\{ \int_{F_0} (f-M)dv - \int_{F'_\varepsilon} (f-M)dv \right\} + M\,(mF_0 - mF'_\varepsilon).$$

Expresia din acolade este însă evident nepozitivă şi prin urmare

$$mF_0 - mF'_\varepsilon \geqslant \frac{\eta}{M}.$$

Însă, în baza teoremei 7,

$$mF_0 - mF'_\varepsilon = m(F_0 + F_\varepsilon) - mF_\varepsilon < \varepsilon,$$

şi obţinem

$$\frac{\eta}{M} < \varepsilon.$$

Prin urmare, ipoteza noastră nu este adevărată. Lema este demonstrată.

Consecinţă. *Să considerăm pe o mulţime mărginită şi deschisă un şir monoton crescător de mulţimi închise*

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_k \subseteq \ldots,$$

în care $mF_k > m\,\Omega - \delta_k$, *unde* $\delta_k \to 0$ *pentru* $k \to 0$. *Fie* f *o funcţie nenegativă şi măsurabilă, continuă pe mulţimile* F_k. *Dacă integralele*

$$\int_{F_k} f\,dv$$

sînt mărginite de acelaşi număr A, *funcţia* f *este sumabilă pe* Ω *iar integrala ei se exprimă cu ajutorul formulei*

$$\int_{\Omega} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int_{F_k} f\,dv.$$

Această consecinţă rezultă nemijlocit din lemă dacă vom lua în consideraţie faptul că şirul mărginit şi nedescrescător de mărimi

$$\int_{F_k} f\,dv$$

are o limită.

Teorema 12. *Fie* f *o funcţie sumabilă şi nenegativă pe mulţimea mărginită şi deschisă* Ω. *Atunci, oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există un* $\delta(\varepsilon)$ *astfel încît are loc inegalitatea*

$$\int_{\Omega_\delta} f\,dv \leqslant \varepsilon,$$

de îndată ce $\Omega_\delta \subseteq \Omega$ *şi* $m\,\Omega_\delta < \delta$

Să admitem ipoteza contrară. Putem găsi atunci un astfel de număr $\varepsilon_0 > 0$ şi mulţimi deschise Ω_δ cu măsură oricît de mică

$$m\Omega_\delta < \delta,$$

pentru care

$$\int_{\Omega_\delta} f\,dv \geqslant \varepsilon_0. \qquad \text{(VI,4)}$$

Cu ajutorul mulţimilor deschise Ω_δ putem construi un şir monoton descrescător de mulţimi deschise Ω_k, pentru care $m\Omega_k < \delta_k$, $\delta_k \to 0$, cînd

$k \to \infty$ şi este îndeplinită inegalitatea (VI.4). Pentru aceasta este suficient să alegem, de exemplu, din Ω_δ un şir de mulţimi Ω_s', astfel încît

$$m\,\Omega_s' < \frac{1}{2^{s+1}},$$

şi să punem $\Omega_k = \sum_{s=k}^{\infty} \Omega_s'$. Conform consecinţei teoremei 6, obţinem $m\,\Omega_k < \frac{1}{2^k}$ deoarece putem considera $\delta_k = \frac{1}{2^k}$. Fie F_k un şir monoton crescător de mulţimi exhaustive închise pentru f pe Ω, în care $m(\Omega - F_k) < \delta_k$. Atunci mulţimile închise $F_k^* = F_k - \Omega_k$ se bucură de proprietatea că

$$mF_k^* > m\,\Omega - 2\,\delta_k.$$

Aceasta, rezultă din faptul

$$\Omega - F_k^* \subseteq (\Omega - F_k) + \Omega_k$$

şi deci

$$m(\Omega - F_k^*) \leqslant m(\Omega - F_k) + m\,\Omega_k \leqslant 2\delta_k$$

În baza consecinţei din lema 4, mulţimile F_k sînt mulţimi exhaustive pentru f pe Ω şi

$$\lim_{k\to\infty} \int_{F_k^*} f\,dv = \int_{\Omega} f\,dv.$$

Avem aici pentru un k suficient de mare

$$\int_{F_k} f\,dv > \int_{\Omega} f\,dv - \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Pe de altă parte, putem găsi în interiorul mulţimii Ω_k o mulţime închisă F_k^{**} pe care f să fie continuă şi pentru care

$$\int_{F_k^{**}} f\,dv > \frac{2\,\varepsilon_0}{3}.$$

Conform construcţiei, F_k^* nu are puncte comune cu F_k. Atunci funcţia f este continuă pe mulţimea închisă $F_k^* + F_k^{**}$, în care caz deducem

$$\int_{F_k^* + F_k^{**}} f\,dv > \int_{\Omega} f\,dv + \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Aceasta însă, nu este posibil deoarece $\int_\Omega f\,dv = \sup_F \int_F f\,dv$. Contradicţia obţinută demonstrează teorema noastră. Proprietatea demonstrată de noi este foarte importantă şi se numeşte proprietatea de continuitate absolută a integralei Lebesgue. Ea caracterizează în întregime dependenţa integralei Lebesgue de mulţimea la care este extinsă integrala. În cele ce urmează noi ne vom folosi foarte des de această proprietate.

Să ne ocupăm acum de studierea mai amănunţită a dependenţei integralei Lebesgue de funcţia de sub semnul integral.

Lema 5. *Dacă funcţia f_2 este mărginită şi nenegativă şi funcţia f_1 sumabilă, şi*

$$f_2 \leqslant f_1,$$

atunci şi funcţia f_2 este de asemenea sumabilă şi, în afară de aceasta, are loc inegalitatea

$$\int_\Omega f_2\,dv \leqslant \int_\Omega f_1\,dv,$$

Într-adevăr, să considerăm un şir monoton crescător de mulţimi închise $F_\varepsilon^{(1)}$ a căror măsură tinde către $m\Omega$ şi pe care este continuă funcţia f_1, precum şi un şir analog $F_\varepsilon^{(2)}$ pentru funcţia f_2. Măsura mulţimilor $F_\varepsilon^{(3)} = F_\varepsilon^{(1)} F_\varepsilon^{(2)}$, aşa cum rezultă din teorema 7, va tinde către $m\Omega$. Vom avea

$$\int_{F_\varepsilon^{(3)}} f_2\,dv \leqslant \int_{F_\varepsilon^{(3)}} f_1\,dv \leqslant \int_\Omega f_1\,dv,$$

Şiru

$$\int_{F_\varepsilon^{(3)}} f_2\,dv$$

nedescrescător, este mărginit şi prin urmare are o limită. În baza lemei 4, funcţia f_2 este sumabilă. Trecînd la limită ne convingem de valabilitatea inegalităţii scrise mai sus pentru integralele lui f_1 şi f_2.

Teorema 13. *Dacă f_1 şi f_2 sînt nenegative şi sumabile pe Ω atunci şi suma lor $f_1 + f_2$ este sumabilă, iar*

$$\int_\Omega (f_1 + f_2)dv = \int_\Omega f_1\,dv + \int_\Omega f_2\,dv. \qquad (*)$$

Construind şirurile de mulţimi $F_\varepsilon^{(1)}$ şi $F_\varepsilon^{(2)}$ la fel ca şi în lema precedentă şi punînd $F_\varepsilon^{(3)} = F_\varepsilon^{(1)} F_\varepsilon^{(2)}$ vom avea

$$mF_\varepsilon^{(3)} \geqslant m\,\Omega - 2\varepsilon.$$

Funcţia $f_1 + f_2$ va fi evident continuă pe $F_\varepsilon^{(3)}$ şi în afară de aceasta

$$\int_{F_\varepsilon^{(3)}} (f_1 + f_2)dv = \int_{F_\varepsilon^{(3)}} f_1\,dv + \int_{F_\varepsilon^{(3)}} f_2\,dv. \qquad (VI,5)$$

Membrul drept are limita $\int_\Omega f_1 dv + \int_\Omega f_2 dv$. Prin urmare, membrul stîng are o limită.

Aplicînd lema 4, ne convingem de faptul că $f_1 + f_2$ este integrabilă şi de valabilitatea formulei (*).

Am considerat pînă acum numai integralele funcţiilor nenegative, continue pe mulţimi deschise şi închise, precum şi integralele funcţiilor măsurabile pe mulţimi deschise. Să trecem acum la integrarea funcţiilor de semn variabil. Fie f o funcţie măsurabilă, care poate lua atît valori pozitive cît şi valori negative Să punem

$$f^+ = \frac{1}{2}[|f| + f],$$

$$f^- = \frac{1}{2}[|f| - f].$$

Funcţiile f^+ şi f^- se numesc, respectiv, *partea pozitivă* şi *partea negativă* a funcţiei f. Funcţia f^+ coincide cu funcţia f în toate punctele în care f este pozitivă şi este nulă în punctele în care f este negativă. Dimpotrivă f^- este nulă în punctele în care f este pozitivă şi egală cu $-f$ în punctele în care f este negativă. Este evident că

$$f = f^+ - f^-$$

Dacă funcţia f este continuă pe o mulţime închisă, atunci ambele funcţii f^+ şi f^- vor fi de asemenea continue pe această mulţime. Într-adevăr, dacă punctul P aparţine lui F şi f este pozitiv în acest punct, atunci f va fi pozitiv în toate punctele mulţimii F, suficient de apropiate de P. Astfel, funcţia f^+ va coincide în vecinătatea punctului P, cu f şi prin urmare va fi continuă. La fel se demonstrează şi continuitatea lui f^- în punctele în care f este negativă. În punctele în care $f = 0$, ambele funcţii f^+ şi f^- vor fi de asemenea continue; deoarece valorile lui f^+, de exemplu, atunci cînd punctul P_k tinde către P pe mulţimea închisă, sau vor coincide cu valorile lui f în acest punct P_k, sau vor fi nule, însă, în orice caz, vor tinde către o valoare limită, egală cu zero. De aici, rezultă.

Observaţie. *Dacă funcţia f este măsurabilă pe mulţimea deschisa Ω, atunci ambele funcţii f^+, f^-, sînt de asemenea măsurabile pe Ω.*

Integrala funcţiei f pe mulţimea deschisă Ω se defineşte cu ajutorul formulei

$$\int_\Omega f\,dv = \int_\Omega f^+\,dv - \int_\Omega f^-\,dv.$$

Funcţia f se numeşte *sumabilă*, dacă sînt sumabile f^+ şi f^-. Din această definiţie rezultă

Teorema 14. *Dacă funcția f este sumabilă pe o mulțime deschisă Ω atunci oricare ar fi sistemul de mulțimi închise F_δ pe care f este continuă și astfel încît*

$$mF_\delta > m\Omega - \delta, \quad \delta \to 0,$$

are loc egalitatea

$$\int_\Omega f\,dv = \lim_{\delta \to 0} \int_{F_\delta} f\,dv.$$

Pentru demonstrație este suficient să observăm că

$$\int_{F_\delta} f\,dv = \int_{F_\delta} f^+ dv - \int_{F_\delta} f^- dv,$$

și să trecem la limită.

Să demonstrăm acum încă o lemă.

Lema 6. *Fie f o funcție măsurabilă pe mulțimea deschisă Ω, scrisă în două moduri diferite sub forma unei diferențe de funcții sumabile nenegative*

$$f = f_1 - f_2 \text{ și } f = f_3 - f_4.$$

Are loc atunci egalitatea

$$\int_\Omega f_1\,dv - \int_\Omega f_2\,dv = \int_\Omega f_3\,dv - \int_\Omega f_4\,dv.$$

Într-adevăr, egalitatea care trebuie demonstrată este echivalentă cu relația

$$\int_\Omega f_1\,dv + \int_\Omega f_4\,dv = \int_\Omega f_2\,dv + \int_\Omega f_3\,dv,$$

care rezultă numaidecît din teorema 13, dacă luăm în considerare că

$$f_1 + f_4 = f_2 + f_3.$$

Lema este demonstrată. Din această lemă rezultă, între altele, că oricare ar fi metoda cu ajutorul căreia am reprezenta pe f sub forma unei diferențe de două funcții sumabile nenegative, egalitatea următoare:

$$\int_\Omega f_1\,dv - \int_\Omega f_2\,dv = \int_\Omega f^+ dv - \int_\Omega f^- dv.$$

Pentru o funcție măsurabilă, sumabilitatea și existența integralei modulului funcției sînt echivalente. Într-adevăr, dacă există integrala lui $|f| = f^+ + f^-$, atunci conform lemei 5, vor fi sumabile fiecare din funcțiile f^+ și f^-. Reciproc, dacă sînt sumabile f^+ și f^- atunci, conform teoremei 13 este sumabilă și funcția $|f|$.

Observație. Fie c o constantă arbitrară, f o funcție sumabilă pe mulțimea deschisă Ω. Atunci,

$$\int_\Omega cf\,dv = c\int_\Omega f\,dv.$$

Valabilitatea acestei observații este aproape evidentă. Pentru a ne convinge de aceasta trebuie să ne folosim de proprietatea analogă a integralelor funcțiilor de semn constant.

Din observația precedentă rezultă următoarea proprietate importantă, mai generală, a integralei Lebesgue. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_k$ niște funcții sumabile, iar $a_1, a_2, \ldots, a_k$ niște constante arbitrare. Atunci

$$\int_\Omega (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_k f_k)\,dv = a_1 \int_\Omega f_1\,dv + a_2 \int_\Omega f_2\,dv + \ldots + a_k \int_\Omega f_k\,dv.$$

Această formulă se demonstrează prin inducție completă. Să semnalăm încă o proprietate a integralei Lebesgue.

Teorema 15. *Să considerăm funcția sumabilă f și o funcție măsurabilă și mărginită φ, pentru care*

$$|\varphi| \leqslant M.$$

Atunci produsul $f\varphi$ va fi sumabil și

$$\left|\int_\Omega f\varphi\,dv\right| \leqslant M\int_\Omega |f|\,dv.$$

Într-adevăr, $|f\varphi| \leqslant M|f|$. Funcția $M|f|$ este sumabilă, deci și $|f\varphi|$ este sumabilă, iar

$$\left|\int_\Omega f\varphi\,dv\right| \leqslant \int_\Omega |f\varphi|\,dv \leqslant M\int_\Omega |f|\,dv.$$

§ 5. Integralele nedefinite ale funcțiilor de o singură variabilă. Exemple

Dacă funcția $f(x)$ este sumabilă pe intervalul $0 < x < 1$, ea va fi evident sumabilă și pe orice interval $0 < x < y$ în care $y \leqslant 1$. Integrala

$$F(y) = \int_0^y f(x)\,dx$$

se numește integrală nedefinită.

Conform definiției măsurii, un punct izolat are măsura nulă. De aceea integrala pe intervalul deschis $0 < x < y$ este egală cu integrala pe oricare din următoarele intervale semideschise și închise

$$0 \leqslant x < y, \quad 0 < x \leqslant y, \quad 0 \leqslant x \leqslant y.$$

Aceasta justifică notația

$$\int_0^y f(x)\,dx$$

și permite să afirmăm valabilitatea egalității

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

oricare ar fi funcția sumabilă $f(x)$.

Să demonstrăm teorema următoare:

Teorema 16. *Derivata integralei nedefinite este egală cu funcția de sub semnul integral în toate punctele de continuitate ale acestei funcții.*

Într-adevăr,

$$\frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \frac{1}{h}\int_y^{y+h} f(x)\,dx.$$

Să notăm cu m_h și M_h respectiv marginea inferioară și marginea superioară a funcției $f(x)$ în intervalul $y \leqslant x \leqslant y + h$ pentru $h > 0$ în intervalul $y + h \leqslant x \leqslant y$ pentru $h < 0$.

Atunci

$$m_h < \frac{F(y+h) - F(y)}{h} < M_h$$

și prin urmare

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} = f(y),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

O funcție măsurabilă nu trebuie să fie numaidecît sumabilă.

Să considerăm cîteva exemple.

Exemplul 8. Funcția $f = \frac{1}{R^{n-\alpha}}$ în care $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2}$ este măsurabilă în sfera $R < 1$. Într-adevăr, dacă excludem din această sferă interiorul unei sfere mici $R \leqslant \varepsilon$, f va fi continuă în porțiunea rămasă. Această

funcție va fi sumabilă în cazul $\alpha > 0$. Pentru a demonstra aceasta, observăm

$$\int\limits_{\frac{1}{2^k} \leqslant R \leqslant 1} \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{R^{n-\alpha}} = \sum_{m=0}^{k-1} \psi_m,$$

unde

$$\psi_m = \int\limits_{\frac{1}{2^{m+1}} \leqslant R \leqslant \frac{1}{2^m}} \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_m}{R^{n-\alpha}}.$$

Să facem în ψ_m schimbarea de variabile $x_i = \frac{\xi_i}{2^m}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Avem aici

$$\psi_m = \frac{1}{2^{m\alpha}} \int\limits_{\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1} \ldots \int \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}\right]^{n-\alpha}} = \frac{1}{2^{m\alpha}} \psi_0,$$

în care

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2},$$

de unde

$$\sum_{m=0}^{k-1} \psi_m \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m\alpha}} \psi_0 = \psi_0 \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplul 9. Funcția $f = \frac{1}{r^{n-\alpha}}$, unde $r = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + 1 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$ este măsurabilă în domeniul cu $2n$ dimensiuni $0 < x_i < 1$; $0 < y_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Aceasta va fi sumabilă pentru $\alpha > 1$.

Într-adevăr, dacă excludem din acest cub mulțimea $r \leqslant \varepsilon$, f va fi continuă în porțiunea rămasă. Volumul domeniului exclus, precum ușor se poate vedea, este o cantitate mică de ordinul lui ε^n. Sumabilitatea lui f pentru $\alpha > 1$ se stabilește ca și în exemplul precedent.

Exemplul 10. Funcția f din cubul v_0, $-1 < x_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, care ia valoarea unitate în punctele ale căror coordonate sînt toate raționale și valoarea zero pentru toate celelalte, este sumabilă.

Toate punctele raționale pot fi numerotate cu ajutorul șirului numerelor naturale.

Într-adevăr, să presupunem că coordonatele unui punct oarecare raţional pozitiv se exprimă cu ajutorul fracţiilor

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}.$$

Să considerăm şirul de $2n$ numere întregi $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Fiecărui punct raţional îi corespunde multe astfel de combinaţii de numere întregi, întrucît unul şi acelaşi număr raţional poate fi reprezentat sub forma unor fracţii reductibile diferite. Totuşi, fiecărei combinaţii de $2n$ numere întregi îi corespunde numai un singur punct raţional bine determinat. Toate combinaţiile de acest fel pot fi numerotate pe rînd cu ajutorul şirului numerelor impare. Pentru aceasta, să extragem la început combinaţiile întregi, pentru care suma elementelor este egală cu zero (ele vor fi, evident, în număr finit) apoi cele pentru care suma elementelor este egală cu 1 , cu 2 etc. În acest mod vor fi numerotate toate punctele raţionale pozitive, fiecăruia corespunzîndu-i o mulţime infinită de asemenea numere. Pentru a face numerotarea biunivocă, trebuie să eliminăm în numerotarea succesivă punctele deja numerotate. În ceea ce priveşte punctele raţionale negative, ele vor fi numerotate. În ceea ce priveşte punctele raţionale negative, ele vor fi numerotate cu ajutorul şirului numerelor pare.

Fiecare din punctele raţionale

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$$

poate fi inclus în interiorul unui anumit elipsoid Ω_k cu centrul în originea sistemului de coordonate şi avînd focarul în punctul dat astfel încît $m\Omega_k \leqslant \frac{1}{2^{k+t}}$.

Suma $\Omega_0^{(t)} = \Omega_1 + \ldots + \Omega_k + \ldots$ va fi o mulţime deschisă avînd măsura $\leqslant \frac{1}{2^t}$ şi de aceea va fi oricît de mică vrem. Mulţimea $F_t = v_0 - \Omega_0^{(t}$ are măsura oricît de apropiată de măsura lui v_0. Pe aceasta, f este continuu şi egal cu zero. F_t formează un sistem exhaustiv; avem deci

$$\int_{-1<x_i<1} \ldots \int f\, dv = 0.$$

Adesea trebuie să considerăm funcţii definite într-un domeniu Ω nemărginit.

Să considerăm sistemul de sfere $R < N$ şi să presupunem că Ω_N reprezintă porţiunea mulţimii deschise Ω care se găseşte în interiorul acestei sfere. Vom spune că funcţia nenegativă f este măsurabilă pe Ω, dacă este măsurabilă în orice Ω_N şi că este sumabilă în Ω dacă integralele

$$\int_{\Omega_N} f\, dv$$

sînt mărginite. Atunci, conform definiţiei, avem

$$\int_{\Omega} f\, dv = \lim_{N\to\infty} \int_{\Omega_N} f\, dv.$$

Integralele funcţiilor de semn variabil se definesc în mod obişnuit.

Pentru asemenea integrale sînt valabile toate proprietăţile generale, pe care le vom enumera

1. $\int_{\Omega} (f_1 + f_2)\, dv = \int_{\Omega} f_1\, dv + \int_{\Omega} f_2\, dv;$

2. $\int_{\Omega} af\, dv = a \int_{\Omega} f\, dv;$

3. $\left| \int_{\Omega} \varphi f\, dv \right| \leqslant \max |\varphi| \int_{\Omega} |f|\, dv.$

în care din existenţa membrilor din dreapta ai acestor relaţii rezultă şi existenţa membrilor din stînga. Demonstraţia acestor proprietăţi se obţine în mod evident cu ajutorul trecerii la limită.

Exemplul 11. Fie $f = \frac{1}{R^{n+\alpha}}$; $R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ în domeniul $R > 1$.

Funcţia f este evident măsurabilă pe Ω. Ea va fi sumabilă pe Ω pentru $\alpha > 0$.

Într-adevăr,

$$\int_{R>1} \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{R^{n+\alpha}} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m,$$

unde

$$\psi_m = \int_{2^m<R<2^{m+1}} \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{R^{n+\alpha}}.$$

Să punem

$$x_i = 2^m \xi_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ şi } \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi^2};$$

atunci

$$\psi_m = \frac{1}{2^{m\alpha}} \int_{1<\rho<2} \ldots \int \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{\rho^{n+\alpha}} = \frac{1}{2^{m\alpha}} \psi_0,$$

sau

$$\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m = \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1} \psi$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Din exemplele 8 și 11 rezultă între altele că integralele

$$\int\cdots\int_{R<\delta}\frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n-\alpha}} \quad \text{și} \quad \int\cdots\int_{R>\frac{1}{\delta}}\frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n+\alpha}}$$

tind către zero pentru $\delta \to 0$.

§ 6. Mulțimi măsurabile. Teorema lui Egorov

Avînd în vedere studierea ulterioară a proprietăților funcțiilor măsurabile, vom introduce acum noțiunea de mulțime măsurabilă. Fie Ω o mulțime deschisă și mărginită, iar E o mulțime arbitrară de puncte cuprinsă în ea. Să construim funcția caracteristică $\xi_E(P)$ pentru mulțimea E, adică funcția egală cu unitatea în punctele lui E și nulă în exteriorul lui E.

Dacă funcția $\xi_E(P)$ este măsurabilă (și, prin urmare, sumabilă în baza proprietății lui $\xi_E(P)$ și Ω de a fi mărginiți) atunci mulțimea E se zice măsurabilă, iar integrala

$$\int_\Omega \xi_E(P)\,dv$$

se numește *măsura lui* E și se notează cu mE.

Nu este greu de verificat că în cazurile în care E este o mulțime deschisă sau închisă, noua definiție a măsurii coincide cu cea dată anterior, deoarece mE se construiește în aceste cazuri la fel ca și mai înainte.

Dacă mulțimea E este măsurabilă, atunci și mulțimea $\Omega - E$ este măsurabilă. Într-adevăr, dacă funcția $\xi_E(P)$ este măsurabilă, atunci va fi măsurabilă și funcția $1 - \xi_E(P) \equiv \xi_{\Omega-E}(P)$. Avem

$$m(\Omega - E) = \int_\Omega [1 - \xi_E(P)]\,dv = m\Omega - mE.$$

Pentru două mulțimi măsurabile, oarecare este valabilă, avem formula

$$\xi_{E_1}(P) + \xi_{E_2}(P) = \xi_{E_1+E_2}(P) + \xi_{E_1E_2}(P). \qquad \text{(VI.6)}$$

Mai departe, $\xi_{E_1E_2} = \xi_{E_1}\xi_{E_2}$. Este evident că $\xi_{E_1E_2}(P)$ este măsurabilă și prin urmare este măsurabilă și $\xi_{E_1+E_2}$. Vedem că suma și intersecția a două mulțimi măsurabile sînt totdeauna măsurabile.

Teorema 17. *Pentru ca mulțimea E, care se găsește în interiorul unei mulțimi deschise Ω, să fie măsurabilă, este necesar și suficient să existe un șir de mulțimi închise F_k, conținute în E și un șir de mulțimi deschise Ω_k, conținînd pe E, astfel încît*

$$m(\Omega_k - F_k) \to 0 \text{ pentru } k \to \infty.$$

Demonstrație. Să presupunem că funcția $\xi_E(P)$ este măsurabilă. Putem găsi, atunci, o mulțime închisă F_k, avînd măsura oricît de apropiată de

$m\Omega$, pe care $\xi_E(P)$ să fie continuă. Fiecare din aceste mulțimi F_k se descompune în două submulțimi fără puncte comune

$$F_k = F_k^{(1)} + F_k^{(2)},$$

unde $F_k^{(1)} = F_kE$, $F_k^{(2)} = F_k - E$. Pe $F_k^{(1)}$ funcția $\xi_E(P)$ este egală cu 1, iar pe $F_k^{(2)}$ ea este nulă.

Fiecare din aceste mulțimi va fi închisă, așa cum ușor se poate vedea. Într-adevăr, un punct limită al șirului de puncte P_n din $F_k^{(1)}$ este un punct al mulțimii F_k și, prin urmare, aparține uneia din mulțimile $F_k^{(1)}$ sau $F_k^{(2)}$. Totuși, el nu poate să aparțină lui $F_k^{(2)}$, întrucît în acest punct funcția $\xi_E(P)$ ar fi discontinuă pe F_k ceea ce contrazice alegerii lui F_k. În același mod se demonstrează proprietatea lui $F_k^{(2)}$ de a fi o mulțime închisă.

Avem, conform ipotezei,

$$mF_k = mF_k^{(1)} + mF_k^{(2)} > m\Omega - \delta_k,$$

unde $\delta_k \to 0$. De aici,

$$mF_k^{(1)} + m\Omega - m\left(\Omega - F_k^{(2)}\right) > m\Omega - \delta_k$$

sau

$$m\left(\Omega - F_k^{(2)}\right) - mF_k^{(1)} < \delta_k,$$

Mulțimile $F_k^{(1)}$ și $\left(\Omega - F_k^{(2)}\right)$ sînt chiar acele mulțimi despre a căror existență s-a afirmat în teorema noastră.

Reciproc, să presupunem că există mulțimile F_k și Ω_k avînd proprietatea indicată în teoremă. Putem înlocui totdeauna mulțimile Ω_k cu mulțimile Ω_k^{**} astfel încît mulțimile $\Omega - \Omega_k^{**}$ să fie închise. Pentru aceasta asociem mulțimii Ω_k mulțimea $\Omega_{\frac{1}{k}}^*$, alcătuită din acele puncte ale mulțimii Ω a căror distanță la frontiera C a mulțimii Ω este mai mică decît $\frac{1}{k}$. Este evident că $m\Omega_{\frac{1}{k}} \to 0$ pentru $k \to \infty$ și de aceea dacă punem $\Omega_k^{**} = \Omega_k + \Omega_{\frac{1}{k}}^*$ atunci, diferența $m\Omega_k^{**} - mF_k$ va fi ca și mai înainte oricît de mică vrem noi, pentru un k suficient de mare. Mulțimea $\Omega - \Omega_k^{**}$ va fi închisă ca fiind diferența dintre mulțimea închisă $\Omega + C$ și mulțimea deschisă $\Omega_k + \Omega_{\frac{1}{k}}^*$.

Este ușor să ne convingem că funcția $\xi_E(P)$ este continuă pe F_k și pe $\Omega - \Omega_k^{**}$. Prin urmare, ea este continuă pe mulțimea $F_k + \left(\Omega - \Omega_k^{**}\right)$, deoarece o funcție continuă pe două mulțimi închise, care nu au puncte comune, este continuă pe suma acestor mulțimi. Să evaluăm măsura acestei mulțimi, notînd-o cu Φ_k. Este evident

$$\Phi_k \equiv F_k + (\Omega - \Omega_k^{**}) = \Omega - (\Omega_k^{**} - F_k).$$

Mai departe,

$$m\Omega = m[\Phi_k + \Omega_k^{**} - F_k] \leqslant m\,\Phi_k + m(\Omega_k^{**} - F_k).$$

Prin urmare,

$$m\Phi_k \geqslant m\Omega - \delta_k, \text{ unde } \delta_k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty.$$

Astfel, $\xi_E(P)$ este continuă pe mulțimile închise Φ_k avînd măsura oricît de apropiată de măsura lui Ω și, prin urmare, este măsurabilă, ceea ce trebuia demonstrat.

Nu este greu de demonstrat că dacă mulțimea E este măsurabilă, atunci

$$mE = \sup_F mF = \inf_\Omega m\Omega,$$

unde F este o mulțime închisă conținută în E, iar Ω este o mulțime deschisă, care conține pe E.

Fie f o funcție sumabilă pe Ω, iar E o mulțime măsurabilă. Vom defini integrala lui f pe mulțimea E cu ajutorul formulei

$$\int_E f\,dv = \int_\Omega \xi_E(P) f(P)\,dv.$$

Este ușor de văzut că această definiție nu depinde de alegerea mulțimii deschise, care conține mulțimea E. Dacă includem mulțimea E într-o altă mulțime oarecare deschisă, mărimea integralei rămîne cea precedentă.

Această definiție este echivalentă cu precedenta. În cazurile cînd $E = F$ este o mulțime închisă pe care funcția este continuă și cînd $E = \Omega$ este o mulțime deschisă pe care funcția este continuă. Într-adevăr, fie $F_\delta^{(1)}$, $F_\delta^{(2)}$ niște mulțimi închise fără puncte comune, pe care $\xi_E(P)$ este continuă și ia valori respectiv egale cu zero sau cu unitatea, și pentru care avem

$$mF_\delta^{(1)} + mF_\delta^{(2)} > m\Omega - \delta,\ \delta \to 0.$$

Existența unor asemenea mulțimi a fost stabilită la demonstrarea teoremei 17. Dacă $E = F$ este o mulțime închisă, iar f este continuă pe F, atunci putem lua drept mulțime $F_\delta^{(1)}$ chiar mulțimea F. Atunci, în baza teoremei

$$\int_\Omega \xi_E(P) f(P)\,dv = \lim_{\delta\to 0} \int_{F_\delta^{(1)} + F_\delta^{(2)}} \xi_E(P) f(P)\,dv = \int_F \xi_E(P) f(P)\,dv = \int_F f\,dv.$$

Dacă $E = \Omega_0$ este o mulțime deschisă iar Φ_δ un sistem de mulțimi exhaustiv pentru f pe Ω_0, atunci mulțimea $F_\delta^{(1)}$ poate fi înlocuită cu Φ_δ, deoarece

$$[\Omega - (\Phi_\delta + F_\delta^{(2)})] \subseteq [\Omega - (F_\delta^{(1)} + F_\delta^{(2)})] + (\Omega_0 - \Phi_\delta)$$

și deci

$$m[\Omega - (\Phi_\delta + F_\delta^{(2)})] \leqslant m[\Omega - (F_\delta^{(1)} + F_\delta^{(2)})] + m(\Omega_0 - \Phi_\delta) \leqslant 2\delta.$$

Astfel, $\Phi_\delta + F_\delta^{(2)}$ va fi un sistem exhaustiv pentru funcția $\xi_E(P) f(P)$. De aici,

$$\int_\Omega \xi_E(P) f(P)\,dv = \lim_{\delta\to 0} \int_{\Phi_\delta + F_\delta^{(2)}} \xi_E(P) f(P)\,dv =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{\Phi_\delta} \xi_E(P) f(P)\,dv = \lim_{\delta\to 0} \int_{\Phi_\delta} f(P)\,dv = \int_{\Omega_0} f\,dv,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În baza formulei VI.6 avem

$$\int_{E_1} f\,dv + \int_{E_2} f\,dv = \int_{E_1+E_2} f\,dv + \int_{E_1E_2} f\,dv.$$

În particular, pentru $f = 1$, obținem egalitatea

$$mE_1 + mE_2 = m(E_1 + E_2) + m(E_1E_2).$$

Dacă, pentru o mulțime oarecare E, există mulțimi deschise Ω_k care o conțin astfel încît $\inf m\Omega_k = 0$, atunci, conform celor spuse mai sus, $mE = 0$. Reciproc, orice mulțime de măsură nulă poate fi inclusă într-o mulțime deschisă de măsură oricît de mică vrem noi.

Teorema 18. *Dacă funcția f este diferită de zero numai pe mulțimea E de măsură nulă, integrala acestei funcții pe mulțimea deschisă Ω va fi nulă.* Într-adevăr, fie F_k un sistem exhaustiv de mulțimi închise pentru f și Ω_k un sistem de mulțimi deschise care conțin pe E, și cu măsura tinzînd către zero. Măsura mulțimilor închise $\Phi_k = F_k - \Omega_k$ va tinde către măsura lui Ω, întrucît $\Omega - \Phi_k = (\Omega - F_k) + \Omega_k$; de aici, $m(\Omega - \Phi_k) \leqslant m(\Omega - F_k) + m\,\Omega_k \to 0$. Astfel, sistemul de mulțimi închise Φ_k va fi exhaustiv. Concluzia teoremei rezultă din faptul că pentru acest sistem toate integralele

$$\int_{\Phi_k} f\,dv$$

sînt nule.

Dacă două funcții sumabile f_1 și f_2 se deosebesc una de alta numai pe o mulțime de puncte de măsură nulă, atunci,

$$\int_\Omega f_1\,dv = \int_\Omega f_2\,dv.$$

Într-adevăr,

$$\left|\int_\Omega f_1 dv - \int_\Omega f_2\,dv\right| = \left|\int_\Omega (f_1 - f_2)\,dv\right| \leqslant \int_\Omega |f_1 - f_2|\,dv.$$

Vom spune că o anumită propoziție are loc aproape peste tot, dacă aceasta are loc pentru toate punctele, în afară poate de punctele unei anumite mulțimi E de măsură nulă. Precum s-a arătat mai sus, dacă două funcții coincid aproape peste tot, atunci integralele lor sînt egale, iar integrala modulului diferenței lor este nulă. Asemenea funcții le vom numi *echivalente*.

Să considerăm încă o chestiune importantă pentru cele ce urmează. Fie E o mulțime măsurabilă și mărginită oarecare, și, fie $F^{(1)}$ un șir monoton crescător de mulțimi închise aparținînd mulțimii E

$$F_1^{(1)} \subseteq F_2^{(1)} \subseteq F_3^{(1)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(1)} \subseteq \ldots$$

Sistemul $F^{(2)}$, *alcătuit din mulțimile*

$$F_1^{(2)} \subseteq F_2^{(2)} \subseteq F_3^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(2)} \subseteq \ldots,$$

îl vom numi interior în raport cu $F^{(1)}$ *dacă pentru orice* $F_k^{(2)}$ *putem găsi o mulțime* $F_{n_k}^{(1)}$ *astfel încît* $F_k^{(2)} \subseteq F_{n_k}^{(1)}$.

Convenim să scriem

$$F^{(2)} \ll F^{(1)} \text{ sau } F^{(1)} \gg F^{(2)}.$$

(Relația $F^{(1)} \gg F^{(2)}$ nu exclude pe $F^{(1)} \ll F^{(2)}$). Din $F^{(1)} \gg F^{(2)}$ și $F^{(2)} \gg F^{(3)}$, rezultă $F^{(1)} \gg F^{(3)}$.

Lema 7. *Fie dat un șir monoton crescător de sisteme de mulțimi închise pe mulțimea* E:

$$F^{(1)} \gg F^{(2)} \gg F^{(3)} \gg \ldots F^{(S)} \gg \ldots$$

astfel încît $\lim\limits_{k\to\infty} (m\,E - mF_k^{(S)}) = 0$.

Există, atunci, un sistem $F^{(\omega)}$ *interior în raport cu toate sistemele* $F^{(S)}$ *și astfel încît* $\lim\limits_{k\to\infty}(mE - mF_k^{(\omega)}) = 0$.

Să demonstrăm această lemă.

În fiecare sistem $F^{(S)}$, alegem o mulțime $F_n^{(S)} = F^{(S)*}$ astfel încît

$$mF_n^{(S)} \geqslant mE - \frac{1}{2^S}.$$

Fie,

$$F_k^{(\omega)} = F^{(k)*} F^{(k+1)*} \ldots F^{(m)*} \ldots.$$

Este evident

$$F_1^{(\omega)} \subseteq F_2^{(\omega)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(\omega)} \subseteq \ldots.$$

Mulțimile $F_k^{(\omega)}$ sînt mulțimi închise.

Nu este greu de văzut că sistemul $F^{(\omega)}$ este interior în raport cu oricare din sistemele $F^{(S)}$. Aceasta rezultă din faptul că $F_k^{(\omega)} \subseteq F^{(S)*}$ pentru orice $S \geqslant k$.

Rămîne să demonstrăm că $\lim\limits_{k\to\infty} mF_k^{(\omega)} = mE$. Avem

$$mE - mF_k^{(\omega)} \leqslant m(E - F^{(k)*}) + m(E - F^{(k+1)*}) + \ldots + m(E - F^{(k+n_k)*}) + \ldots$$

$$\ldots \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{k-1}},$$

de unde rezultă afirmația noastră. Lema este demonstrată.

O consecință a acestei importante leme este

Teorema 19. *Șirul de funcții* $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ *continue pe mulțimea închisă* F, *convergent peste tot pe* F, *converge uniform pe sistemul de mulțimi închise* F_δ *astfel încît*

$$\lim_{\delta\to 0} mF_\delta = mF.$$

Pentru demonstrarea acestei teoreme vom considera mulțimile închise $F_k(\varepsilon)$, care se bucură de proprietatea că pe ele

$$|f_{m_1} - f_{m_2}| \leqslant \varepsilon,$$

oricare ar fi $m_1 > k$ și $m_2 > k$.

Oricare ar fi ε, fiecare punct din F aparține cel puțin unui $F_k(\varepsilon)$. Prin. Aplicînd teorema 10(VI), urmare,

$$F = F_1(\varepsilon) + \ldots + F_k(\varepsilon) + \ldots$$

În afară de aceasta, $F_1(\varepsilon) \subseteq F_2(\varepsilon) \subseteq \ldots \subseteq F_k(\varepsilon) \subseteq \ldots$ aplicînd teorema 10 (VI), vom avea

$$\lim_{k\to\infty} mF_k(\varepsilon) = mF.$$

Să considerăm șirul de sisteme $F^{(S)}$ alcătuit din $F_1\left(\frac{1}{2^S}\right), F_2\left(\frac{1}{2^S}\right) \ldots$

Este evident

$$F^{(1)} \gg F^{(2)} \gg \ldots$$

Aplicînd lema 7, ne convingem de existența sistemului $F^{(\omega)}$ interior în raport u toți $F^{(S)}$. Șirul $f_1, f_2, \ldots$ va fi uniform convergent pe orice mulțime $F_k^{(\omega)}$.

Într-adevăr, $F_k^{(\omega)}$ se găsește în interiorul unui anumit $F_{n_S}^{(S)}$ pentru orice (S) și deci obținem

$$|f_{m_1} - f_{m_2}| < \frac{1}{2^S} \text{ pentru } m_1 > n_S,\ m_2 > n_S.$$

Teorema este demonstrată.

Din acestă teoremă rezultă nemijlocit un fapt fundamental din teoria funcțiilor măsurabile.

Teorema lui Egorov. *Un șir de funcții măsurabile* $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$, *convergent aproape peste tot pe o mulțime deschisă și mărginită* Ω, *admite ca limită o funcție măsurabilă.*

Într-adevăr, să punem în evidență mulțimile închise F_k pe care f_k este continuă, astfel încît, să avem

$$mΩ - mF_k \leqslant \frac{\delta}{2^{k+1}}.$$

Pe mulțimea

$$F_0 = F_1F_2 \ldots F_k \ldots$$

toate funcțiile $f_1, f_2, \ldots$ sînt continue.

Să evaluăm măsura lui F_0.

Avem

$$mF_0 = \lim_{k\to\infty} mF_1F_2 \ldots F_k,$$

$$mF_1 - mF_1F_2 = m(F_1 + F_2) - mF_2 \leqslant mΩ - mF_2 \leqslant \frac{\delta}{2^2},$$

$$mF_1F_2 - mF_1F_2F_3 = m(F_1F_2 + F_3) - mF_3 \leqslant mΩ - mF_3 \leqslant \frac{\delta}{2^4} \text{ ș.a.m.d.}$$

de unde

$$mF_1F_2 \ldots F_k \geqslant mF_1 - \frac{\delta}{4} = mΩ - (mΩ - mF_1) - \frac{\delta}{4} \geqslant mΩ - \frac{\delta}{2}$$

și, prin urmare,

$$mF_0 \geqslant mΩ - \frac{\delta}{2}.$$

Din convergența lui $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ aproape peste tot, rezultă existența mulțimilor închise F_δ astfel încît $m F_\delta \geqslant mΩ - \frac{\delta}{2}$, pe care aceasta este convergentă. Atunci $F_\delta^* = F_0F_\delta$ se bucură de proprietatea

$$mF_\delta^* \geqslant mΩ - \delta.$$

În baza teoremei 19, șirul $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ este uniform convergent pe mulțimea $F_\delta' \subseteq F_\delta^*$, astfel încît

$$mF_\delta^* - mF_\delta' < \delta,$$

ceea ce înseamnă că $mF_\delta' \geqslant mΩ - 2\delta$ și, prin urmare,

$$f_0 = \lim_{k\to\infty} f_k$$

este continuă pe mulțimea F_δ', avînd măsura oricît de apropiată de $mΩ$ și este măsurabilă, ceea ce trebuia demonstrat.

Folosind teorema 19 putem demonstra următoarea lemă importantă.

Lema 8. *Dacă șirul nedescrescător de funcții sumabile $f_1, f_2, \ldots, f_k \ldots$ se bucură în domeniul Ω de proprietatea*

$$\int_\Omega f_k\, dv \leqslant A,$$

adică dacă integralele termenilor săi rămîn mărginite, atunci șirul $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ are aproape peste tot ca limită a sa o funcție sumabilă

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f_0$$

și în afară de aceasta

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\, dv = \int_\Omega f_0\, dv.$$

Lema va fi demonstrată dacă vom stabili existența unor mulțimi F_δ^* pe care toate funcțiile f_k să fie continue, și șirul f_k uniform convergent, iar $m(\Omega - F_\delta^*) < \delta$, unde δ este un număr pozitiv arbitrar.

Într-adevăr, funcția limită f_0 va fi aici continuă pe toate mulțimile F_δ^* și va fi îndeplinită inegalitatea

$$\int_{F_\delta^*} f^0\, dv \leqslant A.$$

În baza lemei 4, f_0 va fi o funcție măsurabilă și sumabilă. Mulțimile închise F_δ^* formează un sistem exhaustiv pentru f_0 și de aceea

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{F_\delta^*} f_0 dv = \int_\Omega f_0\, dv \leqslant A.$$

În sfîrșit, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, vom avea, pentru un k suficient de mare

$$\int_{F_\delta^*} f_k\, dv \leqslant \int_{F_\delta^*} f_0\, dv \leqslant \int_{F_\delta^*} f_k\, dv + \varepsilon,$$

și, prin urmare,

$$\int_\Omega f_k\, dv \leqslant \int_\Omega f_0\, dv \leqslant \int_\Omega f_k\, dv + \varepsilon.$$

Deci

$$\int_{\Omega} f_0\, dv = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k\, dv,$$

ceea ce trebuia demonstrat. Să demonstrăm existența mulțimilor care se bucură de proprietatea indicată. Să considerăm la început cazul cînd $f_k \geqslant 0$.

Vom lua în considerare funcțiile

$$\psi_k = \operatorname{arctg} f_k.$$

Este evident că ψ_k va fi un șir mărginit nedescrescător. De aceea ψ_k converge peste tot pe Ω.

Să notăm

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = \psi_0.$$

Din considerațiile făcute în demonstrația teoremei lui Egorov, vedem că există mulțimi închise F_δ

$$m\Omega - mF_\delta < \delta,$$

pe care convergența este uniformă iar ψ_0 este continuă.

Fie F'_δ mulțimea închisă a punctelor din F_δ pentru care $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Pe F'_δ funcția ψ_k tinde uniform către $\frac{\pi}{2}$ și deci $f_k = \operatorname{tg} \psi_k$ tinde uniform către ∞. Prin urmare,

$$mF'_\delta = 0,$$

altfel am avea

$$\int_{F'_\delta} f_k\, dv \to \infty,$$

ceea ce este, evident, imposibil.

Incluzînd pe F'_δ în domeniul Ω_δ, astfel încît

$$m\Omega_\delta < \delta,$$

vom pune

$$F^*_\delta = \Omega_\delta - F_\delta.$$

Este evident

$$mF^*_\delta > m\Omega - 2\delta.$$

Pe mulțimea F^*_δ șirul ψ_k converge uniform către o limită diferită de $\frac{\pi}{2}$, ceea ce înseamnă că f_k converge uniform către o limită finită.

Lema este demonstrată.

Dacă f_k este o funcție de semn variabil, atunci este suficient să considerăm șirul

$$\varphi_k = f_k - f_1,$$

iar demonstrația se reduce la cea precedentă.

§ 7. Convergența în medie a funcțiilor sumabile

Ca exemple de aplicare a teoremelor demonstrate mai sus, vom prezenta cîteva propoziții în legătură cu proprietățile măsurii.

Teorema 20. *Să presupunem dat pe mulțimea deschisă Ω un șir de mulțimi măsurabile $E_1, E_2, \ldots E_k, \ldots$ care nu au puncte comune două cîte două. Atunci suma acestor mulțimi*

$$E_0 = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots$$

este măsurabilă și

$$mE_0 = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$

Într-adevăr, să presupunem că $\xi_i(P)$ este funcția caracteritică a mulțim E_i. Să punem

$$\psi_S = \sum_{i=1}^{S} \xi_i(P).$$

Fiecare din funcțiile ψ_S este sumabilă, conform teoremei 13, ca fiind suma unui număr finit de funcții sumabile. Șirul ψ_S este un șir nedescrescător care converge către funcția caracteristică a mulțimii E_0, deci către $\xi_0(P)$. În afară de aceasta $\psi_S \leqslant 1$ întrucît mulțimile nu au puncte comune și, prin urmare, nu pot exista două funcții $\xi_i(P)$ diferite de zero într-un punct oarecare. În virtutea lemei pe care am demonstrat-o, funcția $\xi_0(P) = \lim_{S\to\infty} \psi_S$ este sumabilă și

$$\int_{\Omega} \xi_0(P)\, dv = \lim_{S=\infty} \int_{\Omega} \Big(\sum_{k=1}^{S} \xi'_k(P)\Big)\, dv = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} \xi_k(P) dv.$$

De aici, rezultă teorema noastră.

Consecința 1. *Dacă $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ este un șir arbitrar de mulțimi măsurabile iar*

$$E_0 = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots,$$

atunci E_0 este măsurabilă și

$$mE_0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} mE_k.$$

Într-adevăr, mulțimea E_0 poate fi scrisă sub forma

$$E_1 + (E_2 - E_1) + [E_3 - (E_1 + E_2)] + \ldots + [E_k - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{k-1})] + \ldots$$

Toți termenii sumei sînt evident măsurabili; ei nu au puncte comune doi cîte doi, iar

$$m\,[E_k - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{k-1})] \leqslant m\,E_k,$$

de unde rezultă afirmația noastră.

Consecința 2. *Suma unui șir de mulțimi de măsură nulă*

$$E_0 = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots, \qquad mE_k = 0,$$

este de asemenea o mulțime de măsură nulă.

Consecința 2 rezultă nemijlocit din consecința 1.

Am demonstrat mai sus că dacă funcția f se anulează aproape peste tot, atunci integrala sa este nulă. Vom demonstra acum o teoremă reciprocă acestei afirmații într-un anumit sens.

Teorema 21. *Dacă integrala unei funcții sumabile nenegative f este nulă pe o mulțime deschisă și mărginită, funcția f este nulă peste tot în afară, poate, de o mulțime de puncte E, de măsură nulă.*

Pentru demonstrație vom considera un sistem monoton crescător de mulțimi închise F_k, pe care funcția f este continuă, iar $m\,(\Omega - F_k) < \frac{1}{2^k}$. Mulțimea de puncte din E_0 aparținînd mulțimii deschise Ω, care nu sînt cuprinse în nici una din mulțimile F_k are măsura nulă, deoarece ea poate fi inclusă în familia de mulțimi deschise $\Omega - F_k$ a căror măsură tinde către zero pentru $k \to \infty$.

Mulțimea Φ_k de puncte ale mulțimii F_k, în care $f \geqslant \frac{1}{2^k}$ este evident o mulțime închisă. Conform ipotezei teoremei

$$\int_{\Phi_k} f\,dv = 0,$$

de unde rezultă $m\Phi_k = 0$. Să punem $E = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k$. Mulțimile Φ_k formează un șir monoton crescător. Orice punct, în care $f > 0$, trebuie să fie cuprins, sau în E_0, sau într-una din mulțimile Φ_k, adică va aparține mulțimii E. Conform celor demonstrate mai sus, $mE = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 22. *Dacă funcția f este sumabilă pe mulțimea deschisă Ω și dacă pentru orice funcție ψ continuă în Ω are loc egalitate*

$$\int_{\Omega} f\psi\,dv = 0,$$

funcția f satisface condiția

$$\int_{\Omega} |f|\,dv = 0,$$

și, prin urmare, va fi nulă aproape peste tot.

Să demonstrăm această teoremă prin reducere la absurd. Dacă integrala $\int_{\Omega} |f|\,dv$ ar fi diferită de zero, atunci cel puțin una din integralele

$$\int_{\Omega} f^+\,dv, \quad \int_{\Omega} f^-\,dv,$$

a căror sumă este $\int_{\Omega} |f|\,dv$ ar fi diferită de zero. Diferența acestor integrale este nulă, deoarece ea este egală cu integrala lui f. Prin urmare, ambele integrale trebuie să fie diferite de zero. Atunci există o mulțime închisă F' pe care $f^+ > 0$ și, prin urmare $f = f^+$, iar pentru această mulțime

$$\int_{F'} f^+\,dv = \int_{F'} f\,dv = h > 0.$$

Această integrală poate fi scrisă sub forma

$$\int_{\Omega} f(P)\,\xi_{F'}(P)\,dv.$$

în care $\xi_{F'}(P)$ este funcția caracteristică a mulțimii F'. Conform lemei 3 și observației de la § 4 există o funcție continuă $\chi_k(P)$ ale cărei valori sînt cuprinse între zero și unu

$$0 \leqslant \chi_k(P) \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \chi_k(P) - \xi_{F'}(P) \leqslant 1,$$

și care va diferi de $\xi_{F'}(P)$ numai pe o mulțime Ω_k de măsură oricît de mică. Aceastea fiind spuse, avem

$$\int_{\Omega} f(P)\,\xi_{F'}(P)\,dv = \int_{\Omega} f(P)\,\chi_k(P)\,dv + \int_{\Omega} f(P)\,[\xi_{F'}(P) - \chi_k(P)]\,dv.$$

Conform ipotezei din teoremă însă, prima integrală din membrul drept este nulă în baza continuității lui $\chi_k(P)$. Folosindu-ne încă de teorema 15. obținem

$$\left|\int_{\Omega} f(P)\,[\xi_{F'}(P) - \chi_k(P)]\,dv\right| \leqslant \int_{\Omega_k} |f(P)|\,dv.$$

În baza continuității absolute a integralei lui $|f(P)|$, ultima integrală devine arbitrar de mică împreună cu măsura Ω_k și, prin urmare, nu poate fi egală cu constanta $h > 0$. S-a obținut o absurditate, care contrazice afirmația noastră. Teorema este demonstrată.

Lema 9. *Orice funcție $\psi(P)$ continuă pe mulțimea deschisă Ω, diferită de zero numai pe o mulțime deschisă Ω_ψ, care se găsește în interiorul lui Ω împreună cu frontiera sa, poate fi aproximată cu o precizie oricît de bună cu ajutorul unor funcții $\psi_h(P)$, avînd derivate continue de orice ordin, funcții diferite de zero numai pe mulțimea deschisă Ω_h, alcătuită din punctele a căror distanță pînă la Ω_ψ este mai mică decît h.* Aici, h este un număr pozitiv, suficient de mic și care depinde de gradul de exactitate al aproximației și de configurațiile lui Ω și Ω_ψ.

Să construim funcția $\psi_h(P)$ cu ajutorul formulei

$$\psi_h(P) = \frac{\int\limits_{r \leq h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}} \psi(P')\, dP'}{\int\limits_{r \leq h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}} dP},$$

unde

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2}.$$

Funcția $\psi_h(P)$ este derivabilă de o infinitate de ori. Într-adevăr, să notăm

$$\int\limits_{r \leq h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}} dP' = \varkappa(h)$$

și să definim funcția $\omega(P, P')$ cu ajutorul relațiilor

$$\omega(P, P') = \begin{cases} 0; & r > h \\ \dfrac{1}{\varkappa(h)} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}}; & r \leqslant h. \end{cases}$$

Funcția $\psi_h(P)$ poate fi scrisă sub forma

$$\psi_h(P) = \int\limits_\Omega \psi(P')\, \omega(P, P')\, dP'.$$

Sub această formă, îi putem aplica teorema derivării sub semnul integral în raport cu un parametru.

Într-adevăr, funcția $\omega(P, P')$ are derivate continue de orice ordin în raport cu coordonatele punctului P. Derivatele de orice ordin ale lui $\omega(P, P')$ există, evident, pentru $r < h$ și pentru $r > h$. Valorile lor limită vor fi toate nule pentru $r > h$ și $r \to h$. Va fi necesar să stabilim că și valorile limită ale tuturor derivatelor lui ω vor fi nule și pentru $r < h$ și $r \to h$. Aceasta rezultă din faptul că orice derivată de ordinul s al lui ω va avea forma

$$\frac{\partial^s \omega}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}} = \frac{e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}}}{(r^2 - h^2)^s} Q(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'),$$

unde Q este un polinom de argumentele sale. Însă $e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}}$ tinde către zero mai repede decît tinde $\frac{1}{(r^2 - h^2)^s}$ către infinit și deci

$$\lim_{r \to h} \frac{\partial^s \omega}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}} = 0$$

Pentru diferența $\psi_h(P) - \psi(P)$, avem

$$\psi_h(P) - \psi(P) = \frac{\int\limits_{r \leq h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}} [\psi(P') - \psi(P)]\, dP'}{\int\limits_{r \leq h} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}} dP'}$$

Pentru un h suficient de mic

$$|\psi(P') - \psi(P)| < \varepsilon,$$

de unde, conform teoremei mediei

$$|\psi_h(P) - \psi(P)| < \varepsilon.$$

Lema este demonstrată.

Această lemă ne permite să utilizăm criteriul integral de anulare a funcției într-o formă întrucîtva mai slabă. (v. § 4 (VI)]. Fie f o funcție sumabilă pe Ω. Să presupunem

$$\int\limits_\Omega f(P)\, \psi(P)\, dP = 0 \tag{VI.7}$$

pentru toate funcțiile $\psi(P)$, care au derivate continue de orice ordin și care sînt diferite de zero, fiecare, numai într-un anumit subdomeniu Ω_ψ, interior domeniului Ω.

Aceasta este suficient pentru a afirma

$$\int\limits_\Omega |f(P)|\, dP = 0.$$

Într-adevăr, dacă condiția (VI.7) este îndeplinită pentru toate funcțiile derivabile de o infinitate de ori, ea este îndeplinită și pentru toate funcțiile continue. Să presupunem contrariul. Ar exista atunci o funcție $\psi_0(P)$ astfel încît

$$\int\limits_\Omega f(P)\, \psi_0(P)\, dP > \varepsilon.$$

În baza lemei, există funcţii $\psi_h(P)$ oricît de apropiate de ψ_0 şi derivabile de o infinitate de ori. Avem

$$\int_\Omega f(P)\psi_0(P)\,dP = \int_\Omega f(P)\,\psi_h(P)\,dP + \int_\Omega f(P)\,[\psi_0(P) - \psi_h(P)]\,dP.$$

Conform ipotezei, prima integrală din membrul drept este nulă. Pe de altă parte,

$$\left|\int_\Omega f(P)\,[\psi_0(P) - \psi_h(P)]\,dP\right| \leqslant \max|\psi_0(P) - \psi_h(P)| \int_\Omega |f(P)|\,dP < \varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv arbitrar. Am ajuns la o contradicţie, care demonstrează afirmaţia noastră.

Pentru demonstraţia importantei teoreme 23 este necesară următoarea

L e m ă d e s p r e l i m i t a s u p e r i o a r ă ş i l i m i t a s u p e r i o a r ă a unui şir. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k \ldots$ un şir oarecare mărginit de numere reale. Numim limită superioară a şirului $\{x_k\}$ un număr Y, astfel încît, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, printre numerele $\{x_k\}$ să se găsească numai un număr finit de termeni, pentru care să fie satisfăcută inegalitatea

$$x_k > Y + \varepsilon,$$

şi o mulţime infinită de termeni, pentru care

$$x_k > Y - \varepsilon.$$

Se numeşte limita inferioară a şirului un număr y, astfel încît inegalitatea

$$x_k < y - \varepsilon$$

să fie satisfăcută numai pentru un număr finit de x_k, iar inegalitatea

$$x_k < y + \varepsilon$$

să aibă loc pentru o mulţime infinită de numere x_k. Dacă limita superioară şi limita inferioară coincid, atunci, evident, şirul este convergent şi are numai un singur punct limită. Notăm de obicei

$$Y = \overline{\lim}\, x_k, \quad y = \underline{\lim}\, x_k.$$

Sînt valabile următoarele formule:

$$\overline{\lim}\, x_k = \lim_{j\to\infty}\left\{\lim_{s\to\infty} \max(x_j, \ldots, x_{j+s})\right\}, \tag{VI.8}$$

$$\underline{\lim}\, x_k = \lim_{j\to\infty}\left\{\lim_{s\to\infty} \min(x_j, \ldots, x_{j+s})\right\}, \tag{VI.9}$$

În membrii din dreapta din (VI.8) şi (VI.9), ambele limite au sens. Într-adevăr pentru o creştere a lui s, mărimile

$$z_s^{(j)} = \max(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+s})$$

nu descresc, rămînînd mărginite şi, prin urmare, tind către anumite limite, pe

care le vom nota cu $z_0^{(j)}$. Mărimile $z_0^{(j)}$ sînt mărginite inferior şi nu cresc odată cu creşterea lui j, întrucît $z_s^{(j)} \leqslant z_s^{(j-1)}$ şi, prin urmare,

$$z_s^{(j)} = \lim_{s\to\infty} z_s^{(j)} \leqslant \lim_{s\to\infty} z_s^{(j-1)} = z_0^{(j-1)}.$$

De aici, rezultă existenţa limitei $\lim_{j\to\infty} z_0^{(j)}$.

Să demonstrăm acum valabilitatea formulei (VI.8). Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, mulţimea infinită de numere $z_s^{(j)}$ va satisface condiţia

$$z_s^{(j)} > \overline{\lim}\, x_k - \varepsilon$$

şi, prin urmare,

$$z_0^{(j)} \geqslant \overline{\lim}\, x_k.$$

Pe de altă parte, pentru un j suficient de mare, toţi $z_s^{(j)}$ vor satisface inegalitatea

$$z_s^{(j)} < \overline{\lim}\, x_k + \varepsilon.$$

Deci,

$$z_0^{(j)} \leqslant \overline{\lim}\, x_k + \varepsilon,$$

de unde şi rezultă valabilitatea formulei (VI.8). În mod analog, poate fi demonstrată, pentru limita inferioară, formula (VI.9), care, de altfel se reduce la formula (VI.8) prin înlocuirea lui x_k cu $-x_k$.

Să presupunem dat un şir de funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ sumabile pe mulţimea deschisă Ω. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N = N(\varepsilon)$ astfel încît, pentru $m, n > N(\varepsilon)$, să aibă loc inegalitatea

$$\int_\Omega |f_m - f_n|\,dv < \varepsilon,$$

atunci şirul $\{f_k\}$ se numeşte *convergent în sine* (convergent Cauchy). Este valabilă

T e o r e m a 23. *Pentru orice şir convergent în sine $f_1, f_2, \ldots, f_k$, există o funcţie sumabilă f_0, numită limita generalizată a şirului $\{f_k\}$ şi care se bucură de proprietatea:*

$$\int_\Omega |f_k - f_0|\,dv \to 0 \quad \text{pentru} \quad k \to \infty.$$

Vom preceda demonstraţia acestei teoreme de o mică observaţie. Fie f_1, f_2, două funcţii sumabile.
Atunci, funcţia

$$f_3 = \max(f_1, f_2)$$

este de asemenea sumabilă. Într-adevăr,

$$\max(f_1, f_2) = f_1 + (f_2 - f_1)^+.$$

Însă din sumabilitatea lui f_2 și f_1 rezultă sumabilitatea diferenței lor $f_2 - f_1$ și sumabilitatea părții pozitive a acestei diferențe. Este evident că funcția

$$\max(f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

în care $f_1, f_2, \ldots f_m \ldots$ sînt funcții sumabile, este de asemenea sumabilă.

Să demonstrăm acum teorema 23. Vom considera subșirul $\{f_{N_k}\}$ extras din șirul $\{f_k\}$ astfel încît

$$\int_\Omega |f_{N_k} - f_{N_{k_1}}| \, dv < \frac{1}{2^k} \quad \text{pentru} \quad k_1 > k.$$

Să notăm f_{N_k} cu ψ_k. Vom arăta că șirul ψ_k converge aproape peste tot către o funcție sumabilă f_0. În acest scop, vom studia $\overline{\lim}\, \psi_k$ și $\underline{\lim}\, \psi_k$. Fie

$$\chi_s^{(j)} = \max(\psi_j, \psi_{j+1}, \ldots, \psi_{j+s}).$$

Să fixăm, deocamdată pe j și să considerăm șirul

$$\chi_1^{(j)}, \chi_2^{(j)}, \ldots, \chi_s^{(j)}, \ldots$$

Acesta este un șir nedescrescător de funcții sumabile. Pe de altă parte,

$$\psi_j \leqslant \chi_s^{(j)} \leqslant \psi_j + |\psi_{j+1} - \psi_j| + |\psi_{j+2} - \psi_{j+1}| + \ldots + |\psi_{j+s} - \psi_{j+s-1}|,$$

și deci,

$$0 \leqslant \int_\Omega \chi_s^{(j)} \, dv - \int_\Omega \psi_j \, dv \leqslant \int_\Omega \left\{ \sum_{k=j+1}^{j+s} |\psi_k - \psi_{k-1}| \right\} dv \leqslant \sum_{k=j}^{j+s-1} \frac{1}{2_k} < \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Prin urmare, în baza lemei 8, șirul $\left\{\chi_s^{(j)}\right\}$ are aproape peste tot ca limită o funcție sumabilă $\chi_0^{(j)}$, pentru care $\chi_0^{(j)} \geqslant \psi_j$ și

$$0 \leqslant \int_\Omega \chi_0^{(j)} \, dv - \int_\Omega \psi_j \, dv \leqslant \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Să considerăm acum șirul $\chi_0^{(1)}, \chi_0^{(2)}, \ldots, \chi_0^{(k)}, \ldots$. Acesta va fi necrescător, deoarece $\chi_s^{(j)} \leqslant \chi_s^{(j-1)}$, de unde $\chi_0^{(j)} \leqslant \chi_0^{(j-1)}$. Integralele lui ψ_j sînt mărginite uniform inferior, întrucît

$$\int_\Omega \psi_j \, dv \geqslant \int_\Omega \psi_0 \, dv - \sum_{k=1}^{j} \int_\Omega |\psi_k - \psi_{k-1}| \, dv \geqslant \int_\Omega \psi_0 \, dv - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \int_\Omega \psi_0 \, dv - 1.$$

Prin urmare, sînt mărginite inferior și integralele lui $\chi_0^{(j)}$.

În baza aceleiași leme 8 șirul $\chi_0^{(j)}$ converge aproape peste tot către o funcție limită f_0, deoarece

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega \chi_0^{(j)} \, dv - \int_\Omega f_0 \, dv = \lim_{j \to \infty} \int_\Omega |\chi_0^{(j)} - f_0| \, dv = 0.$$

Conform lemei despre limite superioară și inferioară a unui șir, avem

$$f_0 = \overline{\lim}\, \psi_k.$$

Să arătăm acum că f_0 satisface condiția teoremei noastre. Avem

$$\int_\Omega |\psi_j - f_0| \, dv \leqslant \int_\Omega |\psi_j - \chi_0^{(j)}| \, dv + \int_\Omega |\chi_0^{(j)} - f_0| \, dv.$$

Ambii termeni din membrul drept al ultimei inegalități sînt oricît de mici vrem pentru un j suficient de mare. De aici

$$\int_\Omega |\psi_j - f_0| \, dv < \varepsilon \text{ pentru } j > J(\varepsilon).$$

Repetînd cuvînt cu cuvînt același raționament pentru funcția

$$f_0^* = \underline{\lim}\, \psi_k,$$

obținem

$$\int_\Omega |\psi_j - f_0^*| \, dv < \varepsilon$$

și, deci

$$\int_\Omega |f_0 - f_0^*| \, dv \leqslant \int_\Omega |\psi_j - f_0| \, dv + \int_\Omega |\psi_j - f_0^*| \, dv < 2\varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\int_\Omega |f_0 - f_0^*| \, dv = 0$$

iar funcțiile f_0, f_0^* coincid aproape peste tot. De aici, rezultă că șirul ψ_k admite o limită aproape peste tot.

În sfîrșit pentru orice funcție a șirului inițial f_k, vom avea

$$\int_\Omega |f_k - f_0| \, dv \leqslant \int_\Omega |f_k - \psi_j| \, dv + \int_\Omega |\psi_j - f_0| \, dv.$$

Prin urmare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, putem găsi un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încît, pentru $k > N(\varepsilon)$, să aibă loc inegalitatea

$$\int_{\Omega} |f_k - f_0| \, dv < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Vom spune că seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(P) \tag{VI.10}$$

este convergentă în sensul lui Lebesgue dacă există o funcție sumabilă u, care se bucură de proprietatea că

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\Omega} \left| u - \sum_{k=1}^{N} u_k \right| dv = 0.$$

Convergența în sensul lui Lebesgue atrage după sine, evident, posibilitatea trecerii la limită sub semnul integral. Seria (VI.10) se va numi *convergentă în sine în sensul lui Lebesgue*, dcă

$$\int_{\Omega} \left| \sum_{k=m}^{m+p} u_k \right| dv < \varepsilon \text{ pentru } m > N(\varepsilon).$$

Teorema 23 poate fi reformulată pentru serii sub următoarea formă: o serie convergentă în sine în sensul lui Lebesgue, converge în sensul lui Lebesgue către o anumită funcție limită.

O serie convergentă în sine poate fi înmulțită termen cu termen cu orice funcție măsurabilă mărginită, convergența sa păstrîndu-se, evident, după această operație.

Teorema 24. *Integralele Lebesgue ale termenilor șirului convergent în sine $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ sînt absolut egale și continue. Cu alte cuvinte, pentru orice $\varepsilon > 0$, putem găsi un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încît, de îndată ce măsura mulțimii deschise Ω_δ este mai mică decît δ, să fie valabilă inegalitatea pentru toate funcțiile f_k*

$$\left| \int_{\Omega_\delta} f_k \, dv \right| < \varepsilon.$$

Să demonstrăm această teoremă. Să presupunem dat un număr pozitiv ε Să ne alegem N astfel încît, pentru $k > N$ și $m > N$, să aibă loc inegalitatea

$$\int_{\Omega\delta} |f_k - f_m| \, dv < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pentru orice f_k din șirul $f_1, f_2, \ldots, f_N$ putem găsi, în virtutea continuității absolute a integralei Lebesgue, un δ_k, astfel încît

$$\int_{\Omega_\delta} |f_k| \, dv < \frac{\varepsilon}{2},$$

de îndată ce $m\Omega_1 < \delta_k$. Să considerăm ca $\delta(\varepsilon)$ pe cel mai mic dintre numerele $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$. Atunci, pentru $k \leqslant N$ inegalitatea din teoremă va fi satisfăcută în baza alegerii lui $\delta(\varepsilon)$, iar pentru $k > N$ satisfacerea ei se demonstrează cu ajutorul următoarei evaluări

$$\left| \int_{\Omega_\delta} f_k \, dv \right| \leqslant \int_{\Omega_\delta} |f_k - f_N| \, dv + \int_{\Omega_\delta} |f_N| \, dv < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 25. *Pentru ca șirul $\{f_k\}$ să fie convergent în sine în sensul lui Lebesgue pe o mulțime deschisă (Ω) și prin urmare să aibă o limită în sensul lui Lebesgue, este suficient să fie îndeplinite două condiții:*

1. *Șirul $\{f_k\}$ să converge aproape peste tot către o anumită funcție limită f_0.*
2. *Șirul $\{f_k\}$ să admită integrale absolut și egal continue.*

Demonstrație. În baza lemei preliminare teoremei lui Egorov, există mulțimi închise F_δ avînd măsura oricît de apropiată de măsura lui Ω și pe care convergența este uniformă. Să alegem $\delta > 0$ atît de mic încît să avem

$$\int_{\Omega_1} |f_k| \, dv < \frac{\varepsilon}{3},$$

de îndată ce $m\Omega_1 < \delta$. Mai departe, vom găsi un rang N, astfel încît pe mulțimea F_δ să aibă loc inegalitatea

$$|f_k - f_m| < \frac{\varepsilon}{3m\Omega},$$

de îndată ce $k, m > N$. Atunci, pentru $k > N$ și $m > N$, vom avea

$$\int_{\Omega} |f_k - f_m| \, dv = \int_{\Omega - F_\delta} |f_k - f_m| \, dv + \int_{F_\delta} |f_k - f_m| \, dv \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega - F_\delta} |f_k| \, dv + \int_{\Omega - F_\delta} |f_m| \, dv + \int_{F_\delta} |f_k - f_m| \, dv < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că șirul $\{f_k\}$ converge în sine, ceea ce trebuia demonstrat.

Consecință. *Dacă șirul de funcții sumabile $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ tinde aproape peste tot pe mulțimea deschisă Ω către funcția limită f_0 și dacă funcțiile f_k nu depășesc în valoare absolută o anumită funcție sumabilă ψ, atunci există integrala*

$$\int_{\Omega} f_0 \, dv$$

și are loc egalitatea

$$\int_{\Omega} f_0 \, dv = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega} f_k \, dv. \tag{VII.11}$$

Într-adevăr, din inegalitatea $|f_k| < \psi$ rezultă proprietatea integralelor șirului $\{f_k\}$ de a fi absolut și egal continue, și deci, convergența sa în sensul lui Lebesgue. Este evident că limita sa în sensul lui Lebesgue trebuie să coincidă aproape peste tot cu f_0. Posibilitatea trecerii la limită sub semnul integral, așa cum am mai observat, este o consecință a convergenței în sensul lui Lebesgue.

§ 8. Teorema lui Lebesgue-Fubini

Să presupunem dată în cubul Ω_0 $(0 < x_i < 1,\ 0 < y_j < 1)$, $i = 1, 2, \ldots n$; $= 1, 2, \ldots, m$, *funcția sumabilă* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *de* $m+n$ *variabile independente. Să considerăm o mulțime măsurabilă* E *din* Ω_0 *și fie* $E(y_1 \ldots, y_m)$ *intersecția acestei mulțimi cu varietatea*

$$y_1 = \text{const.},\quad y_2 = \text{const.}.\ \ldots,\quad y_m = \text{const.},$$

adică mulțimea de puncte care au aceleași coordonate

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

ca și punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m$ *din* E *pentru* $y_1, \ldots, y_m$ *fixați. Fie* E_y *proiecția lui* E *pe varietatea* $y_1, \ldots, y_m$, *adică mulțimea tuturor punctelor ale căror coordonate* $y_1, \ldots, y_m$ *sînt aceleași cu coordonatele* y_i *ale punctelor mulțimii* E.

Să definim funcția

$$\psi^{(E)}(y_1, \ldots, y_m) = \begin{cases} 0 \text{ în afara lui } E_y. \\ \displaystyle\int_{E(y_1, \ldots, y_m)} f\,dx_1 \ldots dx_n \text{ pe } E_y. \end{cases} \qquad \text{(VI.12)}$$

Atunci,

a) *Integralele din membrul drept al lui* (VI.12) *există aproape pentru toate valorile* $y_1 \ldots, y_m$ *(adică pentru toate valorile înafară poate de punctele ale unei anumite mulțimi de măsură nulă).*

b) *Funcția* $\psi^{(E)}(y_1, \ldots y_m)$ *este o funcție sumabilă de variabilele* $y_1, \ldots, y_m$.

c) $$\int_E f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m = \int_{0<y_j<1} \psi^{(E)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m. \qquad \text{(VI.13)}$$

Fără a limita generalitatea putem considera f pozitiv. Să demonstrăm această teoremă la început pentru cazul cînd E este domeniul Ω iar funcția f este continuă pe Ω. Să construim sistemul de mulțimi-rețele Φ_h, care acoperă domeniul Ω, Este evidentă formula

$$\int_{\Phi_h} f dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_m = \int_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi h)}(y_1 \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m. \qquad \text{(VI.14)}$$

Șirul $\psi^{(\Phi h)}(y_1, \ldots y_m)$ este un șir crescător de funcții măsurabile, astfel încît

$$\int_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi h)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m \leqslant \int_\Omega f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m.$$

În baza lemei 8, acest șir admite o limită $\psi'(y_1, \ldots y_m)$ aproape peste tot astfel încît,

$$\lim_{h\to 0} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m) = \psi'(y_1, \ldots, y_m)$$

iar

$$\lim_{k\to 0} \int_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m = \int_{0<y_j<1} \psi'(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m.$$

Însă, $\Phi_h(y_1, \ldots, y_m)$ formează un sistem exhaustiv de poliedre pentru $\Omega(y_1, \ldots, y_m)$ întrucît orice punct $\Omega(y_1, \ldots, y_m)$ cade într-unul dintre ele, $\Phi_h(y_1, \ldots, y_m)$ prin urmare

$$\psi'(y_1, \ldots, y_m) = \psi^{(\Omega)}(y_1, \ldots, y_m).$$

Trecînd la limită în (VI.14), obținem afirmația noastră.

Din cele demonstrate, rezultă o observație importantă.

Observație. Să considerăm sistemul de domenii $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_k \supset \ldots$, astfel încît,

$$\lim_{k\to\infty} m\,\Omega_k = 0.$$

Atunci, aproape pentru orice punct $y_1, \ldots, y_m$ vom avea $m\Omega_k(y_1, \ldots, y_m) \to 0$ pentru $k \to \infty$.

Într-adevăr, conform celor demonstrate,

$$m\Omega_k = \int_{0<y_j<1} m\Omega_k(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m.$$

Șirul de funcții $m\Omega_k(y_1, \ldots, y_m) = \psi_k(y_1, \ldots, y_m)$ este monoton și mărginit; prin urmare, el admite o limită în toate punctele

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = \psi_0(y_1, \ldots, y_m).$$

În baza lemei 8 putem trece la limită sub semnul integral

$$\lim_{k\to\infty} \int_{0<y_j<1} \psi_k\,dy_1 \ldots dy_m = \int_{0<y_j<1} \psi_0\,dy_1 \ldots dy_m = \lim_{k\to\infty} m\Omega_k = 0.$$

Prin urmare, $\psi_0 = 0$ aproape peste tot. Afirmația noastră este demonstrată.

Să considerăm acum cazul cînd E este o mulțime închisă F pe care f este continuă. Acest caz se reduce la cel precedent dacă prelungim pe f în întregul cub Ω_0 și considerăm domeniul $\Omega = \Omega_0 - F$. Este evident că

$$\int_F f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m = \int_{\Omega_0} f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m - \int_\Omega f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m. \qquad \text{(VI.15)}$$

Pe de altă parte,

$$\psi^{(F)} + \psi^{(\Omega)} = \psi^{(\Omega_0)}$$

și deci,

$$\int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(F)} dy_1 \dots dy_m =$$

$$= \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Omega_0)}\, dy_1 \dots . dy_m - \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Omega)}\, dy_1 \dots . dy_m. \qquad \text{(VI.16)}$$

Introducînd în membrul drept al lui (VI.15) reprezentarea integralelor $(m + n)$ — multiple cu ajutorul funcțiilor $\psi^{(\Omega_0)}$ și $\psi^{(\Omega)}$ și folosindu-ne de formula (VI.16), obținem teorema noastră pentru acest caz.

Să considerăm, însfîrșit, cazul cînd E este o mulțime deschisă Ω, iar f o funcție sumabilă arbitrară. Cazul general al mulțimii măsurabile E poate fi redus ușor la acest caz.

Să construim un sistem exhaustiv de mulțimi închise, F_k pentru funcția f. Conform celor demonstrate,

$$\int\limits_{F_k} f\, dx_1 \dots dx_n\, dy_1 \dots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\, dy_1 \dots dy_m. \qquad \text{(VI.17)}$$

Șirul $\psi^{(F_k)}$ este un șir crescător de funcții măsurabile, astfel, încît

$$\int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\, dy_1 \dots dy_m \leqslant \int\limits_{\Omega} f\, dx_1 \dots dx_n\, dy_1 \dots dy_m.$$

În baza lemei 8 aceasta admite o limită finită ψ' aproape peste tot, astfel, încît

$$\lim \psi^{(F_k)} = \psi', \lim \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\, dy_1 \dots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi'\, dy_1 \dots dy_m.$$

Să arătăm că

$$\psi' = \psi^{(\Omega)}$$

În acest scop, vom stabili că $F_k(y_1, y_2, \dots, y_m)$ formează un sistem exhaustiv pentru $\Omega(y_1, y_2, \dots, y_m)$ aproape pentru toți $y_1, \dots, y_m$.

Într-adevăr, măsura lui $\Omega - F_k$ este oricît de mică vrem noi pentru un k suficient de mare. Prin urmare, în baza observației de la § 8 lecția VI, avem pentru orice punct

$$\lim_{k\to\infty} m\,[\Omega(y_1, y_2, \dots, y_m) - F_k(y_1, y_2, \dots, y_m)] = 0.$$

Înseamnă că $F_k(y_1, y_2, \dots, y_m)$ formează, într-adevăr, un sistem exhaustiv pentru $\Omega(y_1, y_2, \dots, y_m)$ aproape pentru orice punct $y_1, \dots, y_m$, și deci $\psi' = \psi^{(\Omega)}$.

Trecerea la limită în formula (VI.17) demonstrează teorema lui Lebesgue-Fubini.

Completare. Dacă funcția

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

este măsurabilă, $f \geqslant 0$ și dacă în afară de aceasta funcția $\psi^{(E)}$ există și este sumabilă, cu alte cuvinte dacă afirmația (a) din teorema lui Lebesgue-Fubini este îndeplinită și membrul drept al formulei (VI.13) are sens, funcția f va fi sumabilă și, prin urmare, teorema lui Lebesgue-Fubini va fi valabilă în ansamblul ei. Atunci, are sens și membrul stîng al formulei (VI.13), care este egal cu cel drept.

Acest lucru este aproape evident. Într-adevăr, dacă s-ar fi întîmplat ca funcția f să nu fie sumabilă, atunci, integralele

$$\int\limits_{F} f\, dx_1 \dots dx_n\, dy_1 \dots dy_m,$$

considerate pe mulțimile închise pe care aceasta este continuă, ar fi putut fi făcute oricît de mari. Să presupunem că integrala, care se găsește în membrul drept din (VI.13), este egală cu A. Să alegem mulțimea închisă F astfel, încît să avem

$$\int\limits_{F} f\, dx_1 \dots dx_n\, dy_1 \dots dy_m > A + 1.$$

Să construim funcția

$$f_1 = \xi(P) f(P),$$

în care ξ este funcția caracteristică a mulțimii F. Atunci, $\psi_1^{(E)}$ există și este sumabilă, iar

$$\int\limits_{0\leqslant y_i\geqslant 1} \psi_1^{(E)}\, dy_1\, dy_2 \dots dy_m > A + 1.$$

Pe de altă parte, este evident că

$$\psi_1^{(E)} \leqslant \psi^{(E)},$$

și deci,

$$\int\limits_{0\leqslant y_i\leqslant 1} \psi_1^{(E)}\, dy_1\, dy_2 \dots dy_m \leqslant \int\limits_{0\leqslant y_i\leqslant 1} \psi^{(E)}\, dy_1\, dy_2 \dots dy_m = A.$$

Contradicția obținută dovedește că presupunerea noastră nu este adevărată.

Din teorema lui Lebesgue-Fubini rezultă încă o consecință evidentă, care merită să fie relevată: *în integralele iterate ale funcțiilor sumabile, putem schimba ordinea de integrare.*

LECȚIA VII

INTEGRALE CARE DEPIND DE UN PARAMETRU

§ 1. Integrale uniform convergente pentru o valoare dată a parametrului

Să considerăm definită în domeniul închis D al variabilelor $x_1, \ldots, x_n$ funcția $F(x_1, \ldots, x_n \lambda)$ depinzînd de parametrul λ ale cărui valori se găsesc în intervalul

$$a \leqslant \lambda \leqslant b.$$

Să considerăm integrala

$$\psi(\lambda) = \int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad \text{(VII.1)}$$

Vom presupune că această integrală există în sensul lui Lebesgue. Cu alte cuvinte vom presupune că funcția $F(x_1, \ldots x_n, \lambda)$ de punctul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ din spațiul cu n dimensiuni, devine continuă dacă excludem din domeniul închis D o anumită mulțime deschisă de puncte σ, de măsură oricît de mică. În aplicații, vom considera de cele mai multe ori cazul cînd $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ este discontinuă în punctele unei anumite varietăți cu un număr mai mic de dimensiuni (în puncte izolate, pe un număr finit de suprafețe, linii ș.a.m.d.). Atunci,

$$\int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \lim \int_{D-\sigma} \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n$$

oricare ar fi modul în care se micșorează mulțimea deschisă σ, cu condiția numai ca măsura sa să tindă către zero. Vom spune

că integrala (VII.1) este uniform convergentă pentru $\lambda = \lambda_0$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, putem găsi un număr $h(\varepsilon)$ și o porțiune $\sigma(\varepsilon)$ a domeniului D, astfel încît

1. Funcția $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$ să fie continuă în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$ pe mulțimea închisă $D - \sigma(\varepsilon)$ pentru $|\lambda - \lambda_0| \leqslant h(\varepsilon)$.

2. Integrala

$$\int_{\sigma(\varepsilon)} \cdots \int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)|\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

să fie mai mică decît ε pentru toate valorile lui λ din intervalul $\lambda_0 - h(\varepsilon) \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 + h(\varepsilon)$.

3. Domeniul $D - \sigma(\varepsilon)$ să fie mărginit (această condiție nu este necesară dacă domeniul D este mărginit).

Lema 1. *Integrala uniform convergentă pentru $\lambda = \lambda_0$ este o funcție de λ, continuă în acest punct.*

Într-adevăr,

$$\left| \int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n - \int_D \cdots \int F(x_1 \ldots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{D-\sigma} \cdots \int [F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)]\, dx_1 \ldots dx_n \right| +$$

$$+ \left| \int_\sigma \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n \right| +$$

$$+ \left| \int_\sigma \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{D-\sigma} \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0|\, dx_1 \ldots dx_n +$$

$$+ \int_\sigma \cdots \int |F(x_1, \ldots x_n, \lambda_1|\, dx_1 \ldots dx_n +$$

$$+ \int_\sigma \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)|\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Alegînd $\sigma(\varepsilon)$ şi $h(\varepsilon)$, astfel, încît al doilea şi al treilea termen din sumă să fie fiecare în parte mai mici decît $\frac{\varepsilon}{3}$, luînd apoi $|\lambda_1 - \lambda_0|$ atît de mic, încît, pentru orice punct $x_1, \ldots, x_n$, aparţinînd domeniului $D - \sigma$, să aibă loc inegalitatea

$$|F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{3\,(D-\sigma)},$$

unde $D - \sigma$ este măsura (volumul) domeniului $D - \sigma$, obţinem

$$\left| \int \cdots \int_D F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n - \int \cdots \int_D F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \ldots dx_n \right| < \varepsilon.$$

Lema noastră este demonstrată.

Integrala (VII,1), convergentă pentru toate valorile lui λ dintr-un anumit interval, astfel încît să existe un $\sigma(\varepsilon)$ comun pentru toţi λ, va fi uniform convergentă în acest interval (în sensul obişnuit). O integrală uniform convergentă într-un anumit interval este o funcţie continuă în acel interval.

În anumite cazuri, este comod să generalizăm în mod corespunzător noţiunea de convergenţă uniformă a integralei pentru valorile date ale parametrului în cazul cînd drept parametru serveşte un punct oarecare P avînd coordonatele $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_n)$ în spaţiul cu n dimensiuni.

Să considerăm integrala

$$\int \cdots \int_D F(x_1, \ldots, x_n, P)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad \text{(VII.2)}$$

Vom spune că această integrală este uniform convergentă în punctul P_0, dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem găsi o vecinătate $h_\varepsilon'(\varepsilon)$ a punctului P_0 şi o porţiune $\sigma(\varepsilon)$ a domeniului D astfel, încît

1. Funcţia F să fie continuă, cînd P se găseşte în vecinătatea $h(\varepsilon)$ a punctului P_0, iar $(x_1, \ldots, x_n)$ se găseşte pe mulţimea închisă $D - \sigma(\varepsilon)$.

2. Integrala

$$\int \cdots \int_\sigma |F(x_1, \ldots, x_n, P)|\, dx_1 \ldots dx_n$$

este mai mică decît ε pentru toate punctele P din $h(\varepsilon)$.

3. Domeniul $D - \sigma$ este mărginit.

Pentru acest caz are de asemenea loc

L e m a 2. *Integrala uniform convergentă pentru $P = P_0$ este o funcţie de P, continuă în punctul P_0.*

Demonstraţia este o repetare a raţionamentelor lemei precedente.

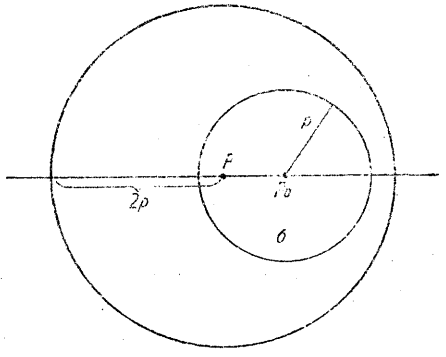

Fig. 10

E x e m p l u. Să considerăm funcţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, P)$ definită pe domeniul mărginit D satisfăcînd condiţia

$$|F(x_1, \ldots, x_n, P)| < \frac{A}{r^{n-\alpha}},$$

unde $\alpha > 0$ şi A, o constantă arbitrară. Am notat cu r distanţa de la punctul $P(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_n)$ pînă la punctul de coordonate $(x_1, \ldots, x_n)$. Presupunem că F este o funcţie continuă de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în întreg domeniul D, exceptînd punctul $P(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$.

Este uşor să stabilim convergenţa uniformă a integralei

$$\int \cdots \int_D F(x_1, \ldots, x_n, P)\, dx_1 \ldots dx_n$$

în orice punct P_0 care se găseşte în interiorul lui D. Este suficient să luăm pentru σ o sferă de rază convenabilă ρ şi cu centrul în punctul P_0, astfel încît

$$\int \cdots \int_{r \leq 2\rho} \frac{A}{r^{n-\alpha}}\, dx_1 \ldots dx_n < \varepsilon,$$

iar pentru $h(\varepsilon)$ sfera de rază

$$\rho_1 < \rho.$$

Intr-adevăr, avem aici

$$\left|\int_{\sigma} \dots \int F(x_1, \dots, x_n P)\, dx_1 \dots dx_n\right| < \int_{\sigma} \dots \int |F|\, dx_1 \dots dx_n <$$

$$< \int_{r \leq 2\rho} \dots \int \frac{A}{r^{n-\alpha}}\, dx_1 \dots dx_n < \varepsilon \text{ [1]}.$$

Este evident că, în $D - \sigma$ şi pe frontiera sa, funcţia F va fi o funcţie continuă de argumentele sale pentru toate punctele P din vecinătatea $h(\varepsilon)$.

§ 2. Derivata integralelor improprii în raport cu un parametru

Să presupunem dată integrala

$$\psi(\lambda) = \int_{D} \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

extinsă la domeniul D care nu depinde de parametrul λ. În analiză se întîlneşte adesea formula

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \int_{D} \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int_{D} \dots \int \frac{\partial F}{\partial\lambda}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \varphi(\lambda),$$

valabilă în cazul cînd integrala din membrul drept este o integrală proprie. Va fi util să ne debarasăm de această condiţie. Este valabilă

[1]) Este evident că sfera de rază $r \leqslant 2\rho$ cu centrul în punctul P, va conţine sfera σ cu centrul în P_0 (fig. 10), dacă punctul P se găseşte faţă de P_0 la o distanţă care nu depăşeşte pe $\rho_1 < \rho$.

Teorema 1. *Dacă*

a) Funcţia $F(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ *este primitivă în raport cu* λ *a funcţiei* $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$ *în domeniul* D *al variabilelor* $x_1, x_2, \dots, x_n$, *pentru* $a \leqslant \lambda \leqslant b$, *adică, dacă*

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) - F(x_1, \dots, x_n\, a) = \int_{a}^{\lambda} f(x_1, \dots, x_n, \lambda)\, d\lambda$$

pentru orice punct $x_1, x_2, \dots, x_n$ *din* D *înafară, poate, de o anumită mulţime de măsură nulă.* (În majoritatea cazurilor, această mulţime va consta din puncte izolate, din linii sau suprafeţe).

b) *Funcţia* f *este o funcţie sumabilă de cele* $(n+1)$ *variabile* $x_1, x_2, \dots x_n, \lambda$), *adică integrala* $(n+1)$ *multiplă*

$$\int_{a}^{\lambda}\int \dots \int_{D} f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)\, dx_1 \dots dx_n\, d\lambda,$$

există pentru $a \leqslant \lambda \leqslant b$.

c) *Funcţia*

$$\varphi(\lambda) = \int_{D} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)\, dx_1 \dots dx_n$$

este continuă pentru $\lambda = \lambda_0$.

Atunci, este valabilă formula

$$\left.\frac{\partial\psi(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{D} \dots \int F(x_1, \dots, x_n, \lambda)\, dx_1 \dots dx_n\right|_{\lambda=\lambda_0} =$$

$$= \int_{D} \dots \int f(x_1, \dots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Demonstraţia acestei teoreme nu prezintă nici o dificultate. Conform definiţiei,

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{D} \dots \int [F(x_1, \dots x_n, \lambda_0 + h) -$$

$$- F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_0)]\, dx_1 \dots dx_n.$$

Integrala, care se găseşte în membrul drept, este egală, în baza teoremei lui Fubini despre schimbarea ordinei de integrare, în integrala $(n+1)$ dimensională, cu

$$\int \dots \int_D f\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n\, d\lambda,$$

$$\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + h,$$

iar această din urmă integrală se scrie sub forma

$$\int \dots \int_D \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+h} f\, dx_1 \dots dx_n\, d\lambda.$$

Folosindu-ne de proprietatea integralelor nedefinite Lebesgue, în punctul de continuitate al funcţiei de sub semnul integral (v. lecţia VI, § 5, teorema 16), avem:

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \varphi(\lambda_0).$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Va trebui să folosim adesea această teoremă pentru diferite integrale. Vom da cîteva criterii foarte simple cu ajutorul cărora putem stabili dacă este îndeplinită condiţia fundamentală (b) a acestei teoreme.

Condiţiile (a) şi (c) se verifică de obicei fără nicio dificultate.

Criteriul 1. Condiţia (b) din teorema 1 (VII) este îndeplinită dacă integrala

$$\int \dots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

este uniform convergentă în intervalul închis

$$a \leqslant \lambda \leqslant b.$$

Nu vom demonstra acest criteriu. Cititorii o pot face uşor şi singuri.

Criteriul 2. Dacă funcţia $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$ este continuă peste tot în raport cu toate argumentele sale, cu excepţia unei curbe netede continue în raport cu λ:

$$x_1 = a_1(\lambda), \quad x_2 = a_2(\lambda), \quad \dots, \quad x_n = a_n(\lambda). \qquad \text{(VII. 3)}$$
$$a \leqslant \lambda \leqslant b,$$

iar în vecinătatea acestei curbe satisface inegalitatea

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)| \leqslant A\rho^{-n+\varepsilon},$$

unde

$$\rho = \min_{a \leq \lambda \leq b} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x_i - a_i(\lambda)]^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

atunci condiţia (b) este satisfăcută.

Să punem în evidenţă în domeniul $(n+1)$ — dimensional

$$\begin{cases} D \\ a \leqslant \lambda \leqslant b \end{cases}$$

linia (VII. 3) cu ajutorul domeniului σ_0 în punctele căruia $\rho < \rho_0$ unde ρ_0 este o constantă. Integrala

$$\int \dots \int_{\substack{D \\ a \leq \lambda \leq b}} |f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)|\, dx_1 \dots dx_n\, d\lambda \qquad \text{(VII. 4)}$$

va fi convergentă, dacă există limita integralei

$$\int \dots \int_{\left\{\substack{D \\ a \leq \lambda \leq b}\right\}-\sigma_0} |f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)|\, dx_1 \dots dx_n\, d\lambda \text{ pentru } \rho_0 \to 0.$$

Această limită există dacă pentru $\rho_0 \to 0$ integrala

$$\int \dots \int_{\sigma_0} |\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)|\, dx_1 \dots dx_n\, d\lambda$$

tinde uniform către zero în raport cu λ.

Avem

$$\int \dots \int_{\sigma_0} |f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)|\, dx_1\, dx_2, \dots dx_n\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b d\lambda \int \dots \int_{0 < \rho \leq \rho_0} A\rho^{-n+\varepsilon}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Însă

$$\int_{0<\rho\leq\rho_0} \cdots \int \rho^{-n+\varepsilon}\, dx_1 \ldots dx_n = c_n\, \rho_0^{\varepsilon};$$

ceea ce face evidentă convergența integralei studiate.

Criteriul 3. Dacă domeniul D nu este mărginit, înafara singularității din criteriul 2, examinată în baza considerațiilor precedente, mai trebuie cercetată și comportarea funcției la infinit.

Convergența integralei (VII. 4) este asigurată, dacă

$$|F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \leqslant Ar^{-b-\varepsilon},$$

unde

$$\varepsilon > 0 \text{ și } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Cititorul va demonstra ușor valabilitatea acestui criteriu.

LECȚIA VIII

ECUAȚIA PROPAGĂRII CĂLDURII

§ 1. Soluția fundamentală

După ce am studiat cîteva probleme pentru ecuațiile cu două variabile independente, vom trece la ecuațiile cu mai multe variabile independente.

Să considerăm înainte de toate ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} + f(x, y, z, t), \quad \text{(VIII.1)}$$

care determină temperatura în punctele unui corp omogen și izotrop.

Schimbarea variabilei t după formula

$$t_1 = a^2 t$$

ne permite să ne debarasăm de coeficientul a^2. De aceea vom considera în cele ce urmează a^2 egal cu unitatea. Notînd, ca și mai înainte, suma derivatelor de ordinul al doilea cu Δu, vom scrie ecuația propagării căldurii sub forma

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, y, z, t). \quad \text{(VIII.1')}$$

Vom rezolva această ecuație.

Vom considera aici problema propagării căldurii într-un mediu nelimitat.

Vom rezolva problema lui Cauchy pentru ecuația (VIII.1') adică problema integrării ecuației (VIII. 1'), cu condiția inițială

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z). \quad \text{(VIII. 2)}$$

Această condiție, așa cum am arătat în lecția II, ne spune că la momentul inițial, distribuția temperaturilor în corp este cunoscută.

Aici va avea un rol esențial o anumită soluție particulară a ecuației omogene a propagării căldurii.

Să considerăm funcția

$$v = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}, \qquad \text{(VIII.3)}$$

unde

$$r = \sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2}.$$

Vom demonstra cîteva leme relative la această funcție.

Lema 1. *Funcția v satisface ecuațiile*

$$\Delta_0 v - \frac{\partial v}{\partial t_0} = 0, \qquad \Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \qquad \text{(VIII.4)}$$

(Aici, $\Delta_0 v$ înseamnă $\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y_0^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z_0^2}$.)

Într-adevăr, derivarea în raport cu x_0, ne dă

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} = -\frac{1}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{5}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}} + \frac{(x_0-x)^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{7}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}$$

iar expresiile analoge, derivatele în raport cu y_0 și z_0, de unde

$$\Delta_0 v = \left(\frac{-3}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{5}{2}}} + \frac{r^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{7}{2}}}\right) e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}},$$

și mai departe

$$\frac{\partial v}{\partial t_0} = \left(\frac{-3}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{5}{2}}} + \frac{r^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{7}{2}}}\right) e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}},$$

ceea ce demonstrează satisfacerea primei din ecuațiile (VIII.4).

Cea de-a doua se obține din prima, dacă observăm că funcția depinde numai de diferențele (x_0-x), (y_0-y), (z_0-z), (t_0-t), și deci

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t_0} = -\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Lema 2. *Pentru $t_0 > t$ are loc egalitatea*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,dx\,dy\,dz = 1.$$

Într-adevăr, introducînd coordonatele sferice r, θ și φ, folosind simetria lui v și integrînd prin părți, obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\infty} r^2\,dr \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{r^2}{2\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,dr = \frac{-1}{\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} r\,d\left(e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,dr = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,d\frac{r}{4(t_0-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

În baza formulei bine cunoscute, avem

$$\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}, \qquad \text{(VIII.5)}$$

de unde și rezultă lema noastră.) [1]

Lema 3. *Să considerăm integrala:*

$$f(t_0-t, x_0, y_0, z_0) = \iiint_{\Omega} v\, dx\, dy\, dz.$$

extinsă la un domeniu finit oarecare Ω.

Pentru $t_0 - t \to 0$ *această integrală tinde către 1, dacă punctul* (x_0, y_0, z_0) *se găsește în interiorul domeniului* Ω *și către zero, dacă punctul* (x_0, y_0, z_0) *se găsește în exteriorul acestui domeniu.*

Să facem o schimbare de variabile independente, punînd

$$x - x_0 = \sqrt{t_0 - t}\,x_1;\ y - y_0 = \sqrt{t_0 - t}\,y_1;\ z - z_0 = \sqrt{t_0 - t}\,z_1.$$

Avem aici

$$f(t_0 - t, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega_1} e^{-\frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{4}}\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

unde domeniul de integrare Ω_1 pentru variabilele x_1, y_1, z_1 se obține din domeniul Ω al variabilelor x, y, z printr-o omotetie avînd coeficientul de omotetie $\frac{1}{\sqrt{t_0 - t}}$ din vîrful (x_0, y_0, z_0) urmată de o translație a originii sistemului de referință în punctul (x_0, y_0, z_0). Atunci cînd $t_0 - t$ tinde către zero, acest

[1]) Demonstrarea formulei (VIII.5) poate fi făcută, de exemplu, astfel:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2) = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Prin urmare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

domeniu se va lărgi nelimitat. Dacă punctul (x_0, y_0, z_0) se găsește în interiorul domeniului Ω, atunci domeniul Ω_1 se va lărgi în toate direcțiile, cuprinzînd la limită întreg spațiul. În baza lemei precedente, ajungem la concluzia că, în acest caz, limita integralei lui $f(t_0 - t, x_0, y_0, z_0)$ va fi egală cu 1.

Dimpotrivă, dacă punctul (x_0, y_0, z_0) se găsește în exteriorul domeniului Ω, atunci, pentru $t_0 - t \to 0$, domeniul Ω_1 se va lărgi, îndepărtîndu-se de originea coordonatelor, astfel, încît distanța cea mai scurtă pînă la originea coordonatelor din sistemul x_1, y_1, z_1 va crește nelimitat. În baza convergenței integralei lui v extinsă la spațiul infinit, convergență care a fost stabilită în lema precedentă, limita integralei $f(t_0 - t, x_0, y_0, z_0)$ va fi nulă în acest caz. Lema este demonstrată.

Lema 4. *Fie* $F(x, y, z)$ *o funcție arbitrară, continuă și mărginită într-un domeniu oarecare* Ω *(în particular* Ω *poate coincide cu întreg spațiul). Atunci, avem*

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\,\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = F(x_0, y_0, z_0), \quad \text{(VIII.6)}$$

dacă punctul (x_0, y_0, z_0) *aparține domeniului* Ω. *In formula* (VIII. 6) *trecerea la limită este uniformă în raport cu* (x_0, y_0, z_0) *în orice domeniu finit* Ω_1, *care se găsește în interiorul lui* Ω *împreună cu frontiera sa.* Aici se presupune că ξ tinde către zero rămînînd tot timpul pozitiv.

Pentru demonstrație să alcătuim diferența

$$\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\,\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz -$$

$$- F(x_0, y_0, z_0) \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\,\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\,\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\, dx\, dy\, dz. \quad \text{(VIII.7)}$$

Cel de-al doilea termen al acestei diferențe tinde în virtutea

lemei 3 către $F(x_0, y_0, z_0)$ și aceasta în mod uniform. Pentru a demonstra lema 4 este suficient să arătăm că această diferență tinde uniform către zero pentru $\xi \to 0$ în orice domeniu $\Omega_1(x_0, y_0, z_0)$.

Să punem în evidență punctul (x_0, y_0, z_0) cu ajutorul unei sfere de rază mică δ. Să presupunem că δ este suficient de mic, astfel, încît pentru $r \leqslant \delta$

$$\left| F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

această inegalitate fiind satisfăcută în mod uniform pentru toate punctele (x_0, y_0, z_0) ale domeniului Ω_1.

Să evaluăm diferența (VIII.7) descompunînd integrala din membrul drept în două integrale extinse respectiv la sfera $r \leqslant \delta$ și la exteriorul ei. Obținem

$$\iiint_{\Omega} v\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{r \geqq \delta} \int \int v\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz. +$$

$$+ \int_{r \geqq \delta} \int \int v\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz. \quad \text{(VIII.8)}$$

Să evaluăm prima din integralele care intră în (VIII.8):

$$\left| \iiint_{r \leqq \delta} v\ [F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2}\, v\,dx\,dy\,dz = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mai departe, în baza faptului că F este mărginită, există o constantă M, astfel încît

$$|F| \leqslant M,$$

și, prin urmare,

$$\left| \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{r \geqq \delta} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\,dx\,dy\,dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{8\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{r \geqq \delta} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,dx\,dy\,dz.$$

Înlocuind variabilele din ultima integrală, punem $x = \sqrt{\xi}x_1$, $y = \sqrt{\xi}y_1$, $z = \sqrt{\xi}z_1$; atunci $r_1^2 = \frac{r^2}{\xi}$ și avem

$$\frac{2M}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{r_1 \geqq \frac{\delta}{\sqrt{\xi}}} e^{-\frac{r_1^2}{4}}\,dx_1\,dy_1\,dz_1 = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\delta}{\sqrt{\xi}}}^{\infty} r_1^2 e^{-\frac{r_1^2}{4}}\,dr.$$

Pentru un ξ suficient de mic, această integrală este mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2}$, în baza convergenței integrale

$$\int_0^{\infty} r_1^2 e^{-\frac{r_1^2}{4}}\,dr_1.$$

De aici, rezultă lema noastră.

Observație. În locul integralei (VIII. 6), putem considera integrala mai generală

$$\Phi(x_0, y_0, z_0\ \xi) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\ \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,F(x, y, z, \xi)\,dx\,dy\,dz, \quad \text{(VIII.9)}$$

în care funcția $F(x, y, z, \xi)$ de sub semnul integral, depinzînd de parametrul ξ, este continuă și mărginită pentru valorile pozitive ale lui ξ

$$|F(x, y, z, \xi)| < M.$$

Să presupunem

$$\lim_{\xi \to 0} F(x, y, z, \xi) = F(x, y, z), \quad \text{(VIII.10)}$$

$F(x, y, z, \xi)$ tinzînd uniform către $F(x, y, z)$ în orice domeniu Ω_1 care se găsește împreună cu frontiera sa în interiorul lui Ω. Atunci,

$$\lim_{\xi \to 0} \Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) = F(x_0, y_0, z_0).$$

Într-adevăr, să considerăm diferența

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) - \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z, \xi) - F(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz.$$

Descompunînd această integrală în două părți: într-o integrală pe sfera $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leqslant 1$, pe care o notăm cu σ și într-o integrală extinsă la exteriorul acestei sfere, obținem, pentru un ξ suficient de mic,

$$\left| \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\sigma} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z, \xi) - F(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\sigma} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\, dx\, dy\, dz < \varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv și arbitrar, dat dinainte.

Mai departe,

$$\left| \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega - \sigma} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x\, y, z, \xi) - F(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{4\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega - \sigma} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\, dx\, dy\, dz.$$

Ultima expresie tinde din nou către zero [v. evaluarea din lema (VIII. 4).] Prin urmare,

$$\lim_{\xi \to 0} \Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) = \lim_{\xi \to 0} \left[\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \right];$$

însă, ultima limită este egală cu $F(x_0, y_0, z_0)$ în baza lemei 4. Observația noastră este demonstrată.

§ 2. Rezolvarea problemei lui Cauchy

Să trecem la rezolvarea ecuației (VIII.1'). Să presupunem dată pentru $t > 0$ o anumită funcție u care are derivate continue pînă la ordinul al doilea, inclusiv, în raport cu coordonatele spațiale și o derivată de ordinul întîi în raport cu timpul. Să presupunem că atît u, cît și primele sale derivate sînt mărginite în întreg spațiul.

Să aplicăm formula lui Green (V. 16) funcțiilor u, v pentru valorile lui t din semiintervalul $0 \leqslant t < t_0$, considerînd drept domeniu de integrare domeniul Ω limitat de sfera S. Obținem

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u)\, d\Omega = \iint_{S} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Mai departe, formula

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_{\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega \right\} dt = \left[\iiint_{\Omega} uv\, d\Omega \right]_0^{t_0},$$

așa cum se poate verifica ușor, este valabilă pentru orice funcție u și v care se bucură de proprietatea că integrala

$$\iiint_{\Omega} uv\, d\Omega$$

este o funcție continuă de t în intervalul $0 \leqslant t \leqslant t_0$ și dacă în afară de aceasta, integrala

$$\iiint_{\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega$$

este o funcție continuă de t în intervalul $0 < t < t_0$.

Comparînd această formulă cu (VIII.11), obținem

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega \left[u\left(\Delta v + \frac{\partial v}{\partial t}\right) - v\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] d\Omega \right\} dt =$$

$$= \left[\iiint_\Omega uv\, d\Omega \right]_0^{t_0} + \int_0^{t_0} \left\{ \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \right\} dt. \quad \text{(VIII.12)}$$

Introducînd în identitatea (VIII.12), valabilă pentru orice u și v, în locul lui u soluția căutată a ecuației (VIII.1′) și ținînd seama de faptul că v este o soluție particulară a ecuației căldurii, determinată cu ajutorul formulei (VIII.3), vom avea în baza lui (VIII.2) și (VIII.4)

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \right\} dt + \left[\iiint_\Omega uvd\,\Omega \right]_0^{t_0} =$$

$$= -\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega vf(x, y, z, t)\, d\Omega \right\} dt. \quad \text{(VIII.13)}$$

Să observăm că integralele de forma

$$\int_0^{t_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} vF(x, y, z, t)\, d\Omega \right\} dt,$$

sînt absolut convergente dacă $F(x, y, z, t)$ este o funcție continuă și mărginită. Într-adevăr,

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega | vF(x, y, z, t | d\Omega \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega \max | F(x, y, z, t) | \; vd\Omega \right\} dt \leqslant \max | F(x, y, z, t) | t_0.$$

Vom presupune deocamdată, că $f(x, y, z,)$ și $\varphi(x, y, z)$ sînt funcții continue și mărginite.

Vom presupune de asemenea că, pentru $t \to t_0$, funcția $u(x, y, z, t)$ tinde uniform către valorile sale inițiale în orice domeniu mărginit.

Să trecem la limită în formula (VIII.13) făcînd ca raza sferei Ω să tindă către infinit. Integralele extinse la suprafața S se vor anula, deoarece, prin ipoteză, soluția u este astfel încît, atît u cît și $\frac{\partial u}{\partial n}$ sînt mărginite; totodată $e^{-\frac{r^2}{\xi}}$ tinde către zero mai repede decît orice putere a lui r, pentru $r \to \infty$.

Obținem, evident

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv\, dx\, dy\, dz \right]_0^{t_0} =$$

$$= -\int_0^0 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \right\} dt.$$

În baza observației de la lema 4, avem

$$\lim_{t \to t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv\, dx\, dy\, dz = u(x_0, y_0, z_0, t_0),$$

de aceea

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z)\, v \Big|_{t=0} dx\, dy\, dz -$$

$$- \int_0^{t_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \right\} dt. \quad \text{(VIII.14)}$$

Formula (VIII.14) ne dă expresia soluției problemei noastre. La demonstrația acestei formule am presupus că soluția problemei există. De aceea este necesar să verificăm dacă funcția u, determinată cu ajutorul formulei VIII.14, satisface într-adevăr ecuația (VIII.2) și condiția inițială.

Este util să observăm că ecuația (VIII.1′) rezolvată de noi pentru $t > 0$, cu condiția inițială dată pentru $t = 0$, poate să uu aibă deloc soluții pentru $t < 0$. În orice caz, soluția (VIII.14) în genere încetează, atunci, să aibă sens.

Trecînd la demonstrație, vom stabili mai întîi că funcția u, determinată cu ajutorul formulei (VIII.14), are derivate continue pînă la un anumit ordin bine determinat. Într-adevăr, înlocuind variabilele de integrare prin transformarea

$$\xi = x - x_0,\ \eta = y - y_0,\ \zeta = z - z_0,\ \tau = t_0 - t,$$

putem transcrie formula (VIII.14) astfel:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi, \eta, \zeta, t_0)\, \varphi(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \int_0^{t_0} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, f(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta, t_0 + \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

unde

$$v(\xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{4\tau}}.$$

Această formulă, așa cum se demonstrează în cursurile de analiză, poate fi derivată în raport cu parametrii, cel puțin de atîtea ori, cîte derivate mărginite au funcțiile f și φ, deoarece integralele derivatelor funcțiilor de sub semnul integral sînt uniform convergente. Vom presupune că funcțiile f și φ posedă numărul necesar de derivate continue și mărginite.

Pentru $f(x, y, z, t) = 0$, formula (VIII.14) ne dă:

$$u_1(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{t_0^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4t_0}}\, \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{VIII.15}$$

unde am notat cu u_1 soluția ecuației

$$\Delta u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0,$$

care satisface condiția

$$u_1\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

Din lema 4 rezultă că membrul drept este o funcție care tinde uniform în orice domeniu mărginit către $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ pentru $t_0 \to 0$. Înafară de aceasta, nu este greu să ne convingem că această integrală poate fi derivată de un număr arbitrar de ori în raport cu variabilele x_0, y_0, z_0, t_0, numai dacă $t_0 > 0$. Obținem

$$\Delta_0 u_1(x_0, y_0, z_0, t_0) - \frac{\partial u_1(x_0, y_0, z_0, t_0)}{\partial t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Delta_0 v - \frac{\partial v}{\partial t_0}\right) \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

În baza lemei 1 (VIII), vedem că $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$ satisface ecuația (VIII.1′) pentru $f(x, y, z, t) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. Unicitatea soluțiilor netede, adică a soluțiilor care posedă numărul necesar de derivate continue, rezultă direct din considerațiile care ne-au condus la formula (VIII.14). Astfel, formula (VIII.14) ne dă soluția problemei pentru $f = 0$.

Ne rămîne să arătăm că al doilea termen din formula (VIII.14), adică funcția

$$u_2(x_0, y_0, z_0, t_0) = -\int_0^{t_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \right\} dt$$

satisface ecuația (VIII.1) și condiția $u_2|_{t=0} = 0$.

De aici va rezulta că funcția va satisface ecuația (VIII.1) și condiția inițială (VIII.2).

Să introducem o funcție auxiliară w definind-o pentru $t_0 > t$ cu ajutorul formulei

$$w(x_0, y_0, z_0, t_0, t) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz.$$

Funcția $w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$ satisface ecuația

$$\Delta_0 w - \frac{\partial w}{\partial t_0} = 0$$

și condiția

$$w|_{t_0 = t} = -f(x_0, y_0, z_0, t).$$

Funcția $u_2(x_0, y_0, z_0, t_0)$ poate fi exprimată cu ajutorul lui w prin relația

$$u_2(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int_0^{t_0} w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)\, dt.$$

Chiar din modul în care a fost construit u_2 este evident

$$u_2(x_0, y_0, z_0, 0) = 0.$$

Să alcătuim expresia

$$\Delta_0 u_2 - \frac{\partial u_0}{\partial t_0}.$$

Derivînd pe u_2 sub semnul integral în raport cu x_0, y_0, z_0, obținem

$$\Delta_0 u_2 = \int_0^{t_0} \Delta_0 w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)\, dt.$$

Mai departe,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t_0} = w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)\Big|_{t=0} + \int_0^{t_0} \frac{\partial w(x_0, y_0, z_0, t_0, t)}{\partial t_0}\, dt,$$

de unde

$$\Delta_0 u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial t_0} = f(x, y, z, t),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Corectitudinea problemei lui Cauchy rezultă imediat prin analiza formulei (VIII.14).

Este evident că micile variații ale lui φ sau f influențează puțin soluția.

Vom reveni mai tîrziu pentru demonstrația faptului că soluția problemei este unică.

Să semnalăm deocamdată o împrejurare importantă.

Dacă termenul liber al ecuației (VIII.1) este nul (aceasta înseamnă că nu avem surse de căldură), soluția problemei lui Cauchy, considerată de noi, este o funcție continuu derivabilă de un număr arbitrar de ori în raport cu x_0, y_0, z_0, care nu depinde de faptul că funcția φ admite derivate sau nu.

Această proprietate a soluției de a fi netedă, deosebește în mod esențial ecuația propagării căldurii, de exemplu, de ecuația coardei vibrante, și deci, de ecuația undelor.

Într-adevăr chiar soluția lui d'Alembert

$$u = \varphi(x - at)$$

a ecuației coardei vibrante poate să nu fie derivabilă mai mult decît de două ori, în raport cu x și t. Aceeași funcție este și soluție a ecuației undelor cu două variabile și cu trei variabile independente, deoarece, evident, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Prin urmare, soluțiile acestor ecuații nu sînt nici ele mai netede decît condițiile inițiale.

Am analizat soluția ecuației (VIII.1') în spațiul cu trei dimensiuni. Exact la fel am fi putut considera ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, y, t) \qquad \text{(VIII.20)}$$

sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t). \qquad \text{(VIII.21)}$$

Fără a ne opri asupra raționamentelor care coincid, în acest caz, în întregime cu raționamentele pentru cazul cu trei dimensiuni, vom da rezultatul definitiv. Pentru ecuația (VIII.20), soluția fundamentală va avea forma

$$v = \frac{1}{4\pi(t_0 - t)}\, e^{-\frac{r^2}{t_0 - t}}, \qquad \text{(VIII.22)}$$

unde $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, iar soluția ecuației (VIII.20) cu condiția

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y)$$

are forma

$$u(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{4\pi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4t_0}}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t_0 - t}\, e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}} f(x, y, t)\, dx\, dy \right\} dt. \qquad \text{(VIII.23)}$$

Exact la fel și pentru ecuația (VIII.21) soluția fundamentală va avea forma

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0 - t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(t_0-t)}},$$

iar soluția ecuației (VIII.21), cu condiția $u|_{t=0} = \varphi(x)$ va avea forma

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t_0}} \varphi(x)dx -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t_0 - t}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(t_0-t)}} f(x, t)\, dx \right\} dt. \quad \text{(VIII.24)}$$

Lăsăm în seama cititorului verificarea valabilității tuturor acestor formule.

LECȚIA IX

ECUAȚIA LUI LAPLACE ȘI ECUAȚIA LUI POISSON

§ 1. Teorema maximului

Am văzut că o serie întreagă de probleme ale fizicii matematice se reduc la rezolvarea diverselor ecuații de tip eliptic. Ne vom ocupa acum de cele mai simple ecuații din această categorie : ecuația lui Laplace

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \quad \text{(IX.1)}$$

și ecuația lui Poisson

$$\Delta u(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z). \quad \text{(IX.2)}$$

Orice funcție, avînd derivate de ordinul al doilea continue și satisfăcînd într-un anumit domeniu ecuația lui Laplace, se numește funcție armonică în acest domeniu.

Înainte de a trece la rezolvarea problemelor legate de aceste ecuații, vom studia cîteva proprietăți generale de care se bucură soluțiile acestor ecuații.

Este valabilă următoarea lemă.

L e m a 1. *Dacă funcția* $\rho(x, y, z)$ *este pozitivă în punctul* (x_0, y_0, z_0) *din interiorul domeniului în care este definită ecuația* (IX.2), *atunci soluția acestei ecuații nu-și poate atinge minimul în acest punct.*

Într-adevăr, dacă funcția $u(x, y, z)$, satisfăcînd ecuația (IX.2), și-ar atinge minimul în x_0, y_0, z_0, atunci $u(x, y, z)$ și-ar atinge minimul în acest punct în raport cu fiecare din variabile în parte.

În acest caz însă, toate derivatele de ordinul întîi ale lui u ar trebui să fie egale cu zero în acest punct, iar derivatele de ordinul al doilea în raport cu fiecare din variabile, ar trebui să fie nenegative. Prin urmare, suma derivatelor de ordinul al doilea ar trebui să fie de asemenea nenegativă, ceea ce contrazice ipoteza

$$\rho(x_0, y_0, z_0) > 0.$$

Lema este demonstrată.

Consecință. *Dacă* $\rho(x, y, z)$ *este negativ în punctul* (x_0, y_0, z_0), *atunci* $u(x, y, z)$ *nu-și poate atinge maximul în acest punct.*

Aceasta se demonstrează prin schimbarea semnelor lui ρ și u.

Teorema 1. *Orice funcție armonică, definită într-un anumit domeniu* Ω *și continuă peste tot, inclusiv frontiera* S, *nu poate lua nicăeri în interiorul lui* Ω *valori mai mari decît valoarea sa maximă de pe frontieră, sau mai mici decît valoarea sa minimă de pe frontieră.*

Într-adevăr să presupunem că

$$u(x_0, y_0, z_0) > u_S + \varepsilon,$$

unde u_s este valoarea lui u într-un punct arbitrar al frontierei domeniului.

Atunci funcția

$$v = u + \eta r^2,$$

unde $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ iar η este o constantă pozitivă arbitrară, va lua pentru η suficient de mic, în punctul (x_0, y_0, z_0) valori mai mari decît $\max v_S$.

Într-adevăr, $v(x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0)$ iar, conform ipotezei, $u(x_0, y_0, z_0) > u_S + \varepsilon = v_S + \varepsilon - \eta r^2$. Alegînd η atît de mic, încît să avem în întregul domeniu Ω

$$\varepsilon - \eta r^2 > \frac{\varepsilon}{2},$$

obținem

$$v(x_0, y_0, z_0) > v_S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prin urmare, v își va atinge maximul undeva în interiorul domeniului. Însă

$$\Delta v = 6\eta.$$

În baza lemei 1, ajungem la o contradicție. A doua parte a teoremei se demonstrează prin schimbarea lui u în $-u$. Ne vom convinge mai tîrziu că orice funcție armonică, care ia în interiorul domeniului o valoare egală cu maximul sau minimul valorii de pe frontieră, este constantă.

Consecința 1. *O funcție armonică egală cu zero pe frontiera unui anumit domeniu finit este identic nulă în întreg domeniul.*

De aici, rezultă că două funcții armonice, care iau aceleași valori în punctele frontierei domeniului, coincid peste tot în interiorul domeniului. Într-adevăr, diferența lor este o funcție armonică nulă pe frontieră și, prin urmare, identic nulă în întreg domeniul.

Consecința 2. *Dacă șirul de funcții* u_n, *armonice în domeniul* Ω *și continue peste tot, inclusiv frontiera, este uniform convergent pe frontiera* S *a acestui domeniu, el va fi uniform convergent în întregul domeniu închis.*

Acest lucru rezultă din faptul că diferența

$$|u_{n_1} - u_{n_2}|, \text{ în care } n_1 > N \text{ și } n_2 > N,$$

fiind oricît de mică pe frontieră (pentru N suficient de mare), va fi arbitrar de mică și în interior. Criteriul lui Cauchy ne dă convergența uniformă a lui u_n pe întregul domeniu închis, ceea ce era de demonstrat.

§ 2. Soluția fundamentală. Formula lui Green

Pentru a studia mai profund proprietățile funcțiilor armonice, vom mai demonstra cîteva leme ajutătoare.

Lema 2. *Funcția*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

satisface ecuația lui Laplace

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \qquad \text{(IX.3)}$$

peste tot înafara punctului $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, *unde* $\frac{1}{r}$ *devine infinit.*

Într-adevăr,

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y - y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z - z_0)^2}{r^5},$$

de unde rezultă (IX. 3).

Lema 3. *Dacă funcția u este continuă și are derivate de ordinul întîi și al doilea continue peste tot în domeniul Ω, primele derivate fiind continue peste tot, inclusiv frontiera, iar derivatele de ordinul al doilea fiind continue în interiorul domeniului, atunci are loc formula*

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{r}\,\Delta u\,d\Omega = \iint_{S}\left(u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS - 4\pi u(x_0, y_0, z_0). \quad \text{(IX.4)}$$

Aici $\frac{\partial}{\partial n}$ înseamnă, ca de obicei, derivata după normala interioară, la suprafața S. Frontiera S a domeniului Ω satisface condițiile din § 1, lecția I, adică este netedă pe porțiuni și interceptată de o dreaptă oarecare paralelă cu una din axele de coordonate, fie într-un număr finit de puncte, fie într-un număr finit de segmente întregi.

Vom presupune la început că u are derivate de ordinul al doilea continue peste tot, inclusiv frontiera S a domeniului Ω. Pentru demonstrație, vom exclude din domeniul Ω o sferă ω avînd raza ε și centrul în punctul (x_0, y_0, z_0) și vom aplica domeniului rămas formula lui Green. Atunci,

$$\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\,\Delta u\,d\Omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Omega-\omega}\frac{1}{r}\,\Delta u\,d\,\Omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Omega-\omega}\left(\frac{1}{r}\,\Delta u - u\,\Delta\,\frac{1}{r}\right)d\,\Omega =$$

$$= \iint_{S}\left(u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS + \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\sigma}\left(u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS, \quad \text{(IX.5)}$$

unde σ este suprafața sferei ω.

Nu este greu să vedem că pe suprafața σ

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

și, prin urmare,

$$\iint_{\sigma} u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS = -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\sigma} u\,dS =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\sigma} u\,(x_0, y_0, z_0)\,dS - \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\sigma}\eta\,dS,$$

unde η tinde către zero pentru $\varepsilon \to 0$, adică

$$|\eta| < \delta(\varepsilon), \text{ unde } \delta(\varepsilon) \to 0 \text{ pentru } \varepsilon \to 0;$$

$$\iint_{\sigma} u\,(x_0, y_0, z_0)\,dS = 4\pi\varepsilon^2\,u(x_0, y_0, z_0); \left|\iint_{\sigma}\eta\,dS\right| \leqslant \delta(\varepsilon)\,4\pi\varepsilon^2.$$

Datorită faptului că $\frac{\partial u}{\partial n}$ este mărginită, avem $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| < k$, și, prin urmare,

$$\left|\iint_{\sigma}\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\sigma} k\,dS \leqslant 4\pi k\varepsilon$$

și

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\sigma}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,u\,dS = -4\pi u\,(x_0, y_0, z_0).$$

Introducînd această expresie în (IX.5) obținem formula căutată (IX.4).

Pentru a ne elibera de ipoteza că derivatele de ordinul al doilea ale lui u sînt continue peste tot, inclusiv frontiera, vom înlocui domeniul Ω prin domeniul Ω_1 care se găsește împreună cu frontiera sa în interiorul domeniului Ω. Aplicînd la început formula (IX.4) domeniului Ω_1 și trecînd apoi la limită pentru $\Omega_1 \to \Omega$, obținem rezultatul dorit. Formula (IX.4) a fost demonstrată în ipoteza că punctul (x_0, y_0, z_0) aparține domeniului Ω. Dacă punctul (x_0, y_0, z_0) se găsește însă în exteriorul lui Ω, formula (IX.4) se scrie astfel

$$\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\,\Delta u\,d\Omega = \iint_{S}\left(u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \quad \text{(IX.6)}$$

Ne convingem ușor de aceasta repetînd întreaga demonstrație și observînd că, în acest caz, nu este necesar să introducem integrala extinsă la domeniul σ. Denumirea de formule ale lui Green se referă adesea la formulele (IX.4) și (IX.6).

Întreaga demonstrație făcută de noi se aplică fără dificultăți și cazului cînd în domeniu avem un număr finit de puncte de discontinuitate ale derivatelor satisfăcînd anumite condiții.

Este ușor de observat analogia dintre formula lui Green (IX.4) și formula asemănătoare (VIII.14), demonstrată de noi pentru ecuația propagării căldurii. Rolul soluției fundamentale a ecuației căldurii, considerată acolo, îl joacă aici *funcția* $\frac{1}{r}$ *pe care o numim soluția fundamentală a ecuației lui Laplace.*

§ 3. Potențialul de volum, potențialul de simplu strat și potențialul de dublu strat

Dacă am cunoaște, din anumite considerații, valorile u, Δu și $\frac{\partial u}{\partial n}$, care intră în formula lui Green (IX.4)

$$\Delta_u = -4\pi\rho,\ u|_S = f_1,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f_2,$$

atunci, această formulă ne-ar da o reprezentare explicită pentru funcția necunoscută u

$$u = \iiint_\Omega \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_1\,dS - \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{r} f_2\,dS. \quad \text{(IX.7)}$$

Totuși, noi nu ne putem da în mod arbitrar f_1, și f_2 și de aceea formula (IX.7) nu dă posibilitatea să construim soluția ecuației (IX.2) ținînd seamă de valorile la limită arbitrare de pe frontieră ale funcției și derivatei sale normale, exact la fel cum am mai făcut aceasta și la rezolvarea problemei coardei vibrante. Vom da denumiri speciale integralelor care se găsesc în membrul drept al acestei formule.

Integrala $\iiint_\Omega \frac{\rho}{r}\,dx,\,dy\,dz$ se va numi *potențial newtonian*, iar funcția ρ — *densitatea acestui potențial.* Analog, vom numi integrala $\iint_S \frac{f_2}{r}\,dS$ *potențial de simplu strat cu densitatea* f_2.

iar integrala $\iint_S f_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS$ *potențial dedublu strat cu densitatea* f_1.

Potențialul newtonian are o semnificație fizică foarte simplă.

Să ne închipuim o anumită masă repartizată în volumul Ω cu densitatea ρ. Să calculăm atracția pe care o exercită această masă asupra unui punct material. Conform legii lui Newton, masa m, care se găsește în punctul (x, y, z), atrage unitatea de masă plasată în punctul (x_0, y_0, z_0) cu forța F, îndreptată înspre punctul (x, y, z) și egală cu $\frac{m}{r^2}$. Cu alte cuvinte,

$$F = \operatorname{grad}_0 U, \text{ unde } U = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Funcția U, al cărui gradient este egal cu forța de atracție, se numește *potențialul gravitației.* De aceea $\frac{m}{r}$ poate fi denumit potențialul newtonian al punctului material (x, y, z) de masă m.

Împărțind întregul volum Ω în elemente mici și înlocuind acțiunea masei $\rho\Delta\Omega$ concentrată în fiecare din aceste volume prin acțiunea unei mase egale concentrată într-un anumit punct mediu, obținem expresia pentru forța F, care acționează asupra unității de masă concentrată în punctul (x_0, y_0, z_0), sub forma

$$F = \sum \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi}\rho\Delta\Omega,$$

unde $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi}$ este valoarea lui $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}$ într-un anumit punct mediu al volumului $\Delta\Omega$.

Trecînd la limită, obținem

$$F = \iiint_\Omega \rho \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}\,d\Omega,\ F_y = \iiint_\Omega \rho \frac{y-y_0}{r^3}\,d\Omega,$$

$$F_x = \iiint_\Omega \rho \frac{x-x_0}{r^3}\,d\Omega,\ F_z = \iiint_\Omega \rho \frac{z-z_0}{r^3}\,d\Omega.$$

Să presupunem că $\rho(x, y, z)$ este o funcție continuă. Mărimile F_x, F_y, F_z, sînt reprezentate cu ajutorul unor integrale uni-

form convergente și în baza teoremei din § 2 (VII) sînt respectiv derivatele în raport cu x_0, y_0, z_0, a funcției $U = \iiint_\Omega \frac{\rho}{r}\, d\Omega$ și, prin urmare,

$$F = \operatorname{grad}_0 U.$$

Astfel U este potențialul de atracție al masei, repartizată cu densitatea ρ în volumul Ω.

Aceeași interpretare o admite și potențialul de simplu strat. Acesta este potențialul de atracție al maselor repartizate pe suprafața S produs în punctele din exteriorul suprafeței. Dacă ρ este densitatea acestor mase, atunci, înlocuind acțiunea fiecărei porțiuni ΔS de suprafață în punctul (x_0, y_0, z_0) prin $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi} f_2\, \Delta S$, unde $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi}$ reprezintă valoarea lui $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}$ într-un anumit punct mediu, însumînd pentru toate elementele ΔS și trecînd la limită, obținem pentru forța de atracție în punctul (x_0, y_0, z_0), expresia $F = \operatorname{grad}_0 U$, $U = \iint_S \frac{f_2}{r} dS$, ceea ce era de demonstrat.

Am considerat ρ și f_2 ca densități ale maselor care se atrag conform legii lui Newton, la fel, însă, am fi putut deduce și expresia potențialului electric creat de sarcini care se atrag după legea lui Coulomb, sau expresia potențialului magnetic.

Să trecem la lămurirea interpretării geometrice a potențialului de dublu strat. Problema noastră va consta în a transcrie această integrală într-o anumită altă formă.

Să considerăm, în general, o suprafață oarecare deschisă S.

Să luăm un punct oarecare O și să construim în jurul acestui punct sfera C, avînd raza egală cu 1.

Vom presupune că suprafața S este bilateră numind una din fețele sale, față interioară, iar cealaltă, față exterioară; prin aceasta determinăm, în același timp, sensul normalei interioare în toate punctele suprafeței.

Să presupunem că această suprafață este împărțită într-un număr finit de porțiuni, astfel încît fiecare porțiune sau să nu întîlnească raza vectoare, dusă din punctul O, mai mult decît într-un singur punct, sau să fie o porțiune dintr-o suprafață conică, avînd vîrful în punctul O.

Pentru fiecare din aceste porțiuni, semnul cosinusului unghiului dintre normala interioară și raza vectoare dusă din O va fi constant. Fie aceste porțiuni $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Să ducem razele vectoare în fiecare punct al porțiunii S_l. Aceste raze, intersectîndu-se cu sfera C, determină pe aceasta domeniul C_l (fig. 11).

Aria acestui domeniu se va *numi unghi solid* sub care se vede suprafața interioară a porțiunii S_l din originea coordonatelor și o vom nota cu ω_{Sl}.

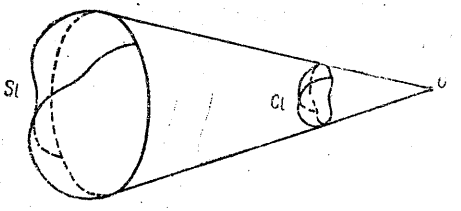

Fig. 11

Vom considera acest unghi solid pozitiv, dacă razele vectoare orientate din origine spre punctul S_l se taie cu normala interioară, formînd un unghi obtuz, adică dacă observatorul, care se găsește în originea coordonatelor, vede într-adevăr suprafața interioară, și vom considera că acest unghi este negativ, dacă observatorul vede suprafața exterioară, unghiul dintre raza vectoare dusă din origine și normala interioară la S_l fiind ascuțit.

Vom considera pentru porțiunile de suprafață conice, care au vîrful în punctul O, unghiul solid egal cu zero.

Unghiul solid al porțiunii S_l se va scrie, în coordonate sferice cu polul în punctul O, astfel

$$\omega_{S_l} = -\iint_{S_l} \operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \qquad \text{(IX.8)}$$

unde sign $[\cos(r, n)]$ înseamnă semnul cosinusului unghiului dintre raza vectoare r și normala interioară n.

Definim unghiul solid ω, sub care se vede din origine fața interioară a întregii suprafețe S, ca suma unghiurilor solide corespunzătoare tuturor porțiunilor S_l.

Acest unghi se va exprima cu ajutorul integralei:

$$\omega_S = -\iint_S \operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Putem formula acum lema noastră.

Lema 4. *Are loc formula*

$$\omega_S = \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS. \qquad \text{(IX.9)}$$

Pentru demonstrație, observăm că ω_S depinde numai de conturul care mărginește suprafața S și nu variază nici de cum atunci cînd au loc deformații oarecare ale suprafeței S, cu condiția de a lăsa conturul l neschimbat, iar suprafața S, în procesul ei de deformare, să nu treacă prin originea coordonatelor.

Integrala (IX.9), de asemenea, nu depinde de suprafața S pentru deformațiile indicate. Într-adevăr, diferența integralelor

$$\iint_{S_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS - \iint_{S_2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS,$$

unde S_1 și S_2 au conturul comun, este o integrală extinsă la o suprafață închisă S.

Întrucît, conform ipotezei, punctul O se găsește în exteriorul domeniului mărginit de suprafața S, în baza formulei lui Green, avem

$$\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = - \iiint_\Omega \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\Omega = 0,$$

deoarece $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$.

Pentru a ne convinge acum de valabilitatea lui (IX.9), este suficient să arătăm că ω_S coincide cu integrala (IX.9), oricare ar fi tipul suprafeței S mărginite de conturul l.

Să luăm, de exemplu, o suprafață alcătuită din porțiunea de sferă C și porțiunea de suprafață conică L, alcătuită din razele vectoare care trec prin origine și prin conturul l. Pentru aceste două porțiuni, valabilitatea lui (IX.9) este evidentă, deoarece pe L are loc, atît egalitatea $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = 0$, cît și egalitatea cu zero a unghiului solid, iar pe C

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = - \operatorname{sign}[\cos(r, n)],$$

și de aceea

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = - \operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Am fi putut stabili valabilitatea lui (IX.9) și printr-un calcul direct.

În baza faptului că integralele (IX.8) și (IX.9) coincid pe orice suprafață, ajungem ușor la concluzia

$$- \operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS.$$

Vom nota, cîteodată, expresia

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS \qquad \text{(IX. 10)}$$

cu $d\omega$ și vom numi $d\omega$ elementul de unghi solid.

Cu ajutorul formulei (IX.10) putem da potențialului de dublu strat forma

$$\iint_S f_1 \, d\omega. \qquad \text{(IX.11)}$$

Această reprezentare ne spune că dacă densitatea f_1 a potențialului de dublu strat este egală cu unitatea, acest potențial exprimă unghiul solid sub care este văzută suprafața S din punctul (x_0, y_0, z_0).

LECȚIA X

CITEVA CONSECINȚE GENERALE ALE FORMULEI LUI GREEN

§ 1. Teorema mediei aritmetice

Formula lui Green (IX.4), în cazul cînd u este o funcție armonică, ia forma următoare:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \qquad (X.1)$$

Această formulă, așa cum am văzut, este valabilă totdeauna, dacă funcția are derivate de ordinul întîi, continue peste tot, inclusiv frontiera, și derivate de ordinul al doilea continue în interiorul domeniului.

Membrul drept al formulei (X.1) reprezintă suma unor potențiale de simplu și dublu strat.

Proprietățile lor vor fi studiate amănunțit în cele ce urmează. Să arătăm acum că fiecare din ele este o funcție armonică peste tot în exteriorul suprafeței S.

Într-adevăr, dacă punctul (x_0, y_0, z_0) nu se găsește pe această suprafață, potențialele de simplu și dublu strat pot fi derivate sub semnul integral de un număr arbitrar de ori în raport cu variabilele (x_0, y_0, z_0). Întrucît $\frac{1}{r}$ este o funcție armonică de aceste variabile, deoarece, așa cum am văzut, $\Delta_0 \frac{1}{r} = 0$, atunci, atît potențialul de simplu strat, cît și potențialul de dublu strat, vor fi funcții armonice în exteriorul lui S. Mai mult decît atît, funcția $\frac{1}{r}$ poate fi dezvoltată în vecinătatea unui punct oarecare x_0^*, y_0^*, z_0^*, într-o serie, după puterile $x_0 - x_0^*, y_0 - y_0^*, z_0 - z_0^*$ care

este uniform convergentă pentru valori ale acestor diferențe suficient de mici în valoare absolută.

Într-adevăr,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{[(x-x_0^*) - (x_0 - x_0^*)]^2 + [(y-y_0^*) - (y_0 - y_0^*)]^2 + [(z-z_0^*) - (z_0 - z_0^*)]^2}} =$$

$$= \left\{[(x-x_0^*)^2 + (y-y_0^*)^2 + (z-z_0^*)^2] \times \right.$$

$$\times \left[1 - 2\frac{(x-x_0^*)(x_0-x_0^*) + (y-y_0^*)(y_0-y_0^*) + (z-z_0^*)(z_0-z_0^*)}{(x-x_0^*)^2 + (y-y_0^*)^2 + (z-z_0^*)^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(x_0-x_0^*)^2 + (y_0-y_0^*)^2 + (z_0-z_0^*)^2}{(x-x_0^*)^2 + (y-y_0^*)^2 + (z-z_0^*)^2}\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Aplicînd acestei expresii dezvoltarea în serie după formula binomului lui Newton, ne putem convinge ușor de faptul că această serie va fi uniform convergentă pentru valorile $(x_0 - x_0^*)^2 + (y_0 - y_0^*)^2 + (z - z_0^*)^2$ suficient de mici în raport cu minimul expresiei

$$(x - x_0^*)^2 + (y - y_0^*)^2 + (z_0 - z_0^*)^2,$$

atunci cînd punctul (x, y, z) parcurge suprafața S.

Integrînd această serie, termen cu termen, ne convingem că funcțiile

$$v = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r}dS \text{ și } w = \frac{1}{4\pi}\iint_S u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}dS$$

admit o asemenea dezvoltare și, prin urmare, sînt funcții analitice de x_0^*, y_0^*, z_0^* peste tot, înafara suprafeței S.

Să presupunem că u este o funcție armonică în sferă, și continuă împreună cu derivatele sale de ordinul întîi pete tot, inclusiv frontiera.

Să aplicăm formula lui Green (X.1) sferei de rază h descrisă în jurul punctului (x_0, y_0, z_0), a cărei suprafață o vom nota de asemenea cu litera S. Obținem

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{h^2}u - \frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS.$$

Însă, pentru orice suprafaţă închisă S_1.

$$\iint_{S_1} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega_1} \Delta u \, dx \, dy \, dz = 0,$$

unde Ω_1 este volumul mărginit de suprafaţa S_1, iar funcţia u este armonică în interiorul lui Ω_1 şi are derivate continue peste tot, inclusiv frontiera.

Prin urmare,

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi h^2} \iint_S u dS = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} u(R, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\varphi, \quad \text{(X.2)}$$

unde ϑ şi φ sînt coordonatele sferice.

De aici, rezultă

Teorema 1. *Valoarea unei funcţii armonice în centrul unei sfere oarecare este egală cu media aritmetică a valorilor sale pe suprafaţa acestei sfere.*

Proprietatea funcţiilor armonice demonstrată de noi caracterizează pe deplin această clasă de funcţii. Este valabilă următoarea

Teorema 2. *Dacă funcţia $u(x, y, z)$, continuă în domeniul Ω, se bucură de proprietatea că valoarea sa în centrul oricărei sfere care se găseşte în interiorul lui Ω, este egală cu media aritmetică a valorilor sale de pe suprafaţa sferei, această funcţie are derivate continue de ordinul al doilea şi*

$$\Delta u = 0,$$

cu alte cuvinte $u(x, y, z)$ este o funcţie armonică.

Demonstrarea acestei teoreme o vom face mai tîrziu. Vom indica deocamdată cîteva proprietăţi ale funcţiilor, care satisfac condiţiei din teorema 2.

Lema 1. *O funcţie continuă $u(x, y, z)$ care se bucură de proprietatea că valoarea sa în centrul oricărei sfere cuprinsă în domeniul ei de definiţie, este egală cu media aritmetică a valorilor sale pe suprafaţa sferei, nu poate avea în interiorul domeniului nici minimum, nici maximum, dacă nu se reduce la o constantă.*

Într-adevăr, dacă funcţia u ar lua valoarea sa maximă într-un punct oarecare P_0 din interiorul domeniului Ω, media aritmetică a valorilor sale pe suprafaţa unei sfere mici σ, care înconjură punctul P_0 ar putea să fie egală cu $u(P_0)$ numai în

cazul în care, peste tot pe suprafaţa σ, funcţia u ar fi egală cu valoarea sa maximă. Aceasta ar însemna că funcţia u este constantă pe sfera σ. Dacă însă funcţia u este constantă pe orice sferă care înconjură un anume punct, în care aceasta ia valoarea sa maximă, funcţia, aşa cum se poate vedea, trebuie să fie constantă pete tot în domeniul Ω. Într-adevăr, să unim punctul P_0 cu un punct oarecare interior P cu ajutorul unei curbe netede oarecari l, care se găseşte în întregime în interiorul lui Ω. Minimul distanţei unui punct arbitrar al liniei l la frontiera domeniului, (minim care există în baza teoremei lui Weierstrass), va fi pozitiv. Prin urmare, există un număr pozitiv η, astfel încît sfera de rază η descrisă în jurul oricărui punct al curbei l se va găsi în întregime în interiorul lui Ω. Putem găsi pe curba l un număr finit de puncte $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n = P$, care se bucură de proprietatea că fiecare din ele se găseşte în interiorul sferei de rază η, descrisă în jurul punctului precedent. Folosind proprietatea demonstrată că u este constant pe orice sferă interioară care înconjură orice punct în care u ia valoarea maximă şi trecînd succesiv de la un vîrf al liniei frînte la celălalt, obţinem

$$u(P) = u(P_0)$$

Lema 2. *Dacă funcţia $u(x, y, z)$, satisfăcînd condiţia lemei precedente, se anulează pe frontiera unui anumit domeniu, Ω, ea este identic nulă în interiorul acestui domeniu.*

Într-adevăr, dacă funcţia u ar lua în domeniul Ω valori diferite de zero, atunci ea ar lua în interiorul domeniului valori mai mari sau mai mici, decît pe frontieră nefiind constantă, ceea ce este imposibil în baza lemei 1.

Lema 3. *Dacă funcţia $u(x, y, z)$, satisfăcînd condiţiile din lema 1, coincide pe o anumită suprafaţă închisă S, cu o funcţie armonică u_0, ea coincide cu această funcţie armonică peste tot în interiorul domeniului mărginit de S şi deci este ea însăşi armonică.*

Într-adevăr, diferenţa $u - u_0$ va satisface la rîndul său condiţiile din lema 1, deoarece acestea vor fi satisfăcute separat de u şi u_0. Pe de altă parte, această diferenţă se anulează pe S. În baza lemei precedente, $u - u_0 = 0$ peste tot în domeniul Ω.

Vom arăta în cele ce urmează că oricare ar fi funcţia continuă $f(S)$, care este definită pe suprafaţa sferei, există o funcţie armonică u continuă în sfera închisă şi egală cu $f(S)$ în punctele de pe frontieră. De aici, va rezulta direct teorema 2. Într-adevăr, oricare ar fi sfera interioară σ din domeniul Ω, există o funcţie u_0, armonică în interiorul sferei σ şi care ia pe aceasta aceleaşi valori

ca şi u. În baza lemei 3, u coincide cu u_0. Aceasta înseamnă că u este o funcţie armonică în orice sferă interioară şi ca atare este armonică în orice punct interior lui Ω, ceea ce trebuia demonstrat.

Din formula (X.2) rezultă următoarea teoremă.

T e o r e m a 3. *Dacă şirul $\{v_n\}$ de funcţii armonice în domeniul Ω converge uniform în acest domeniu către o funcţie limită v, această limită este la rîndul său o funcţie armonică.*

Într-adevăr, dacă fiecare din funcţiile v_n satisface egalitatea

$$v_n(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi h^2}\iint_S v_n\, dS,$$

unde S este sfera de rază $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=h$, atunci aceeaşi egalitate va fi satisfăcută şi de funcţia limită. Prin urmare, v este o funcţie armonică în Ω, ceea ce trebuia de demonstrat. De aici, rezultă, între altele, că, dacă funcţia armonică $v(x, y, z, \lambda)$ depinde în mod continuu de parametrul λ într-un interval finit $a \leqslant \lambda \leqslant b$, atunci şi integrala lui v în raport cu parametrul λ şi extinsă la acest interval reprezintă de asemenea o funcţie armonică.

§ 2. Comportarea unei funcţii armonice în vecinătatea unui punct singular

Să presupunem că funcţia u are un punct singular în domeiul Ω, fiind însă armonică în vecinătatea acestui punct. Să cercetăm comportarea ei în vecinătatea uni astfel de punct singular. Pentru simplificare, vom presupune că acest punct este chiar originea coordonatelor. Să exprimăm funcţia u în coordonate sferice; atunci $u = u(R, \vartheta, \varphi)$.

L e m a 4. *Dacă funcţia $u(x, y, z)$ satisface inegalităţile:*

$$|u| \leqslant \frac{A}{R^n}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial R}\right| \leqslant \frac{A}{R^{n+1}},$$

în care A este o constantă iar $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şi este o funcţie armonică în Ω, cu excepţia originii sistemului de coordonate, atunci, funcţia $u(x, y, z)$ admite în Ω reprezentarea

$$u(x_0, y_0, z_0) = \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i+j+k=m} a_{ijk}\frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x_0^i\, \partial y_0^j\, \partial z_0^k} + u^*(x_0, y_0, z_0), \qquad (X.3)$$

unde u^* este o funcţie, armonică în întregul domeniu Ω inclusiv punctul $(0, 0, 0)$.

Acest fapt rezultă direct din formula lui Green (X.1). Înconjurînd punctul $(0, 0, 0)$ cu o sferă mică σ, avînd centrul în origine, obţinem

$$u(x_0 y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}u - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS + \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}u - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS.$$

În vecinătatea punctului $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ funcţia $\frac{1}{r}$ poate fi reprezentată cu ajutorul formulei Mac-Laurin sub forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i+j+k=m}\frac{1}{i!\,j!\,k!}x^i y^j z^k \left.\frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial x^i\, \partial y^j\, \partial z^k}\right|_0 + R_n,$$

unde valorile derivatelor se consideră în punctul $x = y = z = 0$, $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ sfera σ fiind considerată atît de mică, încît punctul (x_0, y_0, z_0) să se găsească în exteriorul ei, iar $|R_n| < CR^n$, unde C este o constantă. Folosindu-ne de faptul că

$$\left.\frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial x^i\, \partial y^j\, \partial z^k}\right|_0 = (-1)^m \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i\, \partial y_0^j\, \partial z_0^k},$$

obţinem

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{i!\,j!\,k!}x^i y^j z^k \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i\, \partial y_0^j\, \partial z_0^k} + R_n. \qquad (X.4)$$

În mod analog, se reprezintă şi $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ printr-o combinaţie liniară, a derivatelor lui $\frac{1}{R_0}$ în raport cu x_0, y_0, z_0 pînă la ordinul $n-1$ cu coeficienţi care nu depind de x_0, y_0, z_0 avînd restul R_n', pentru care este valabilă inegalitatea $|R_n'| < C_1 R^{n-1}$. Aceasta rezultă din faptul că derivatele lui $\frac{1}{r}$ în raport cu x, y, z

se deosebesc numai prin semn de derivatele în raport cu x_0, y_0, z_0, iar pentru aceste derivate reprezentarea căutată este evidentă. Însă,

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos(nx)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(ny)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(nz)\frac{\partial}{\partial z},$$

unde $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ nu depind de x_0, y_0, z_0 şi sînt mărginite.

De aici, obţinem

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}u - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS + \frac{a_0^{(\sigma)}}{R_0} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk}^{(\sigma)} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k} + \frac{1}{4\pi}\int\int_\sigma \left(R_n' u - R_n \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS,$$

unde $a_{ijk}^{(\sigma)}$ sînt anumiţi coeficienţi numerici.

Să trecem la limită, cînd σ se strînge în jurul punctului $x = y = z = 0$. Limita integralei extinsă la σ va fi nulă în baza condiţiilor lemei, iar primul termen al membrului drept este o funcţie armonică de x_0, y_0, z_0, care nu depinde de σ (suma potenţialelor de simplu strat şi de dublu strat).

De aici, rezultă că suma

$$\frac{a_0^{(\sigma)}}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i+j+k=m} a_{ijk}^{(\sigma)} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k}$$

trebuie să tindă către o anumită limită $\Phi(x_0, y_0, z_0) = \Phi(P_0)$. Să arătăm că această limită trebuie să se exprime sub forma

$$\frac{a_0}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i+j+k=m} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k}.$$

Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm următoarea lemă

Lema 5. *Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ nişte funcţii de $x_1, x_2 \ldots, x_n$ (k este un număr finit). Dacă combinaţia liniară a acestor funcţii cu coeficienţi, care nu depind de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ci numai de indicele m*

$$\varphi^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} y_i^{(m)} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

converge pentru $m \to o$, limita ei este şi ea o combinaţie liniară a aceloraşi funcţii φ_i.

Într-adevăr, funcţia $\varphi^{(m)}$ nu poate lua, evident, valori independente arbitrare în întregul spaţiu, deoarece, atribuindu-i o anumită valoare într-un anumit punct $P_0^{(s)}$, obţinem o ecuaţie liniară, pe care trebuie s-o satisfacă numerele $y_1^{(m)}$.

Numărul unor asemenea ecuaţii liniare nu este mai mare decît k; de aceea, putem găsi N puncte $P_0^{(1)}, \ldots, P_0^{(N)}$ ($N \leqslant k$), astfel, încît valoarea funcţiei $\varphi^{(m)}$ să fie determinată în întregime în orice punct P cu ajutorul valorilor luate în aceste puncte

$$\varphi^{(m)}(P) = \sum_{S=1}^{N} \varphi^{(m)}(P_0^{(S)})\, \psi_S(P), \qquad (X.5)$$

unde $\psi_S(P)$ este o combinaţie liniară de φ_i cu coeficienţi constanţi.

Reciproc, orice funcţie care satiface ecuaţia (X.5), poate fi reprezentată sub forma unei combinaţii liniare de φ_i.

De aici, rezultă lema noastră. Dacă trecem la limită în egalitatea (X.5) vedem că $\varphi^{(0)}$ trebuie să satifacă ecuaţia

$$\varphi^{(0)}(P) = \sum_{s=1}^{N} \varphi^{(0)}(P_0^{(s)})\, \psi_s(P),$$

ceea ce înseamnă că $\varphi^{(0)}$ este o combinaţie liniară de $\varphi_i(P)$, ceea ce era de demonstrat.

Teorema 4. *Reprezentarea* (X.3) *are loc dacă este satisfăcută inegalitatea*

$$|u| \leqslant \frac{A}{R^n}.$$

Să introducem în locul lui $u(R, \vartheta, \varphi)$ o funcţie ajutătoare

$$v(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^{n+1}}\int_0^R u(R_1, \vartheta, \varphi)\, R_1^n\, dR_1; \qquad (X.6)$$

integrala din membrul drept este convergentă. Ea poate fi reprezentată sub forma

$$v(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^{n+1}}\int_0^1 u(R\xi, \vartheta, \varphi) R^n \xi^n\, d(R\xi) =$$

$$= \int_0^1 u(R\xi, \vartheta, \varphi)\xi^n\, d\xi = \int_0^1 u(\xi x, \xi y, \xi z)\, \xi^n\, d\xi.$$

După cum ne putem uşor convinge prin derivare directă, expresia de sub semnul integral din ultima integrală este o funcţie armonică de variabilele (x, y, z); de aici, rezultă, conform teoremei 3 din § 1, că şi v este o funcţie armonică.

Este evident

$$\frac{\partial v(R, \vartheta \varphi)}{\partial R} = \frac{n+1}{R^{n+2}} \int_0^R u(R_1, \vartheta, \varphi) R_1^n \, dR_1 + \frac{u(R, \vartheta, \varphi)}{R}. \qquad (X.7)$$

Din formulele (X.6) şi (X.7), rezultă

$$|v| \leqslant \frac{1}{R^{n+1}} \int_0^R A dR_1 = \frac{A}{R^{n+1}},$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial R}\right| \leqslant \frac{n+1}{R^{n+2}} \int_0^R A dR_1 + \frac{A}{R^{n+1}} = \frac{A(n+2)}{R^{n+1}}.$$

Prin urmare, funcţiei v îi sînt aplicabile toate condiţiile lemei 4, şi v poate fi reprezentată sub forma

$$v = \frac{a_0}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \, \partial y_0^j \partial z_0^k} + w(R_0, \vartheta, \varphi),$$

unde w este o funcţie armonică în vecinătatea originii coordonatelor.

Funcţia u poate fi obţinută din v cu ajutorul unor calcule simple

$$u(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^n} \frac{\partial}{\partial R} [R^{n+1} v(R, \vartheta, \varphi)] =$$

$$= (n+1) v(R, \vartheta, \varphi) + x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Luînd în consideraţie că $\psi_{ijk} = \dfrac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i \, \partial y^j \, \partial z^k}$ este o funcţie omogenă avînd gradul de omogenitate $(m+1)$, prin urmare

$$x \frac{\partial \psi_{ijk}}{\partial x} + y \frac{\partial \psi_{ijk}}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_{ijk}}{\partial z} = -(m+1) \psi_{ijk},$$

şi observînd că expresia $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z}$ este o funcţie armonică dacă w este o funcţie armonică (acest lucru se verifică uşor prin derivare directă), ne convingem de valabilitatea acestei teoreme.

Consecinţă. *Dacă funcţia $u(x, y, z)$ mărginită în vecinătatea originii este armonică peste tot, poate cu excepţia originii, poate fi transformată într-o funcţie armonică alegînd în mod corespunzător pe u (0, 0, 0).*

Funcţia u coincide în vecinătatea originii cu funcţia armonică w. Prin urmare, ea poate să nu fie armonică numai datorită faptului că u (0, 0, 0) nu este egal cu w (0, 0, 0). De aici, rezultă afirmaţia noastră. Este evident că orice punct poate juca rolul originii coordonatelor.

§ 3. Comportarea unei funcţii armonice la infinit. Puncte conjugate

Funcţia $\frac{1}{r}$ poate fi pusă sub o formă foarte comodă pentru cele ce urmează. Să ne ocupăm de această transformare

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} =$$

$$= \frac{1}{R R_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_0^2} - 2\frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{R^2 R_0^2} + \frac{1}{R^2}}},$$

unde

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad R_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

De aici,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R R_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{R^2} - \frac{x_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{R^2} - \frac{y_0}{R_0^2}\right)^2 - \left(\frac{z}{R^2} - \frac{z_0}{R_0^2}\right)^2}}.$$

Să notăm

$$\frac{x}{R^2} = \xi, \qquad \frac{y}{R^2} = \eta, \qquad \frac{z}{R^2} = \zeta,$$

$$\frac{x_0}{R_0^2} = \xi_0, \qquad \frac{y_0}{R_0^2} = \eta_0, \qquad \frac{z_0}{R_0^2} = \zeta_0.$$

Punctul (ξ, η, ζ) îl vom numi conjugat cu punctul (x, y, z) în raport cu sfera unitate. Nu este greu de văzut că

$$P^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{R^2},$$

$$x = \frac{\xi}{P^2}, \quad y = \frac{\eta}{P^2}, \quad z = \frac{\zeta}{P^2}.$$

Astfel, proprietatea de conjugare este reciprocă: dacă punctul (ξ, η, ζ) este conjugat cu punctul (x, y, z) atunci și invers, punctul (x, y, z) este conjugat cu punctul (ξ, η, ζ).

Punctul conjugat unui punct dat se găsește pe raza care trece prin origine și prin punctul dat la o distanță de origine, inversă distanței date.

Notînd,

$$\rho = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2},$$

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = P,$$

$$\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2} = P_0,$$

obținem

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{RR_0}\,\frac{1}{\rho} = \frac{PP_0}{\rho}. \tag{X.8}$$

Din această formulă rezultă o teoremă importantă pentru aplicații.

Teorema 5. *Dacă funcția $u(R, \vartheta, \varphi)$ este armonică într-un anumit domeniu Ω al variabilelor R, ϑ, φ, atunci și funcția*

$$\frac{1}{P}\, u\left(\frac{1}{P}, \vartheta, \varphi\right) = v(P, \vartheta, \varphi)$$

este de asemenea armonică în domeniul corespunzător Ω al variabilelor P, ϑ, φ, obținut din domeniul Ω prin substituția $P = \frac{1}{R}$. Cu alte cuvinte, $\frac{1}{P}\, u\left(\frac{1}{P}, \vartheta, \varphi\right)$ este o funcție armonică de variabilele ξ, η, ζ.

Într-adevăr, conform formulei lui Green (X.1), orice funcție armonică $u(x, y, z)$ se poate reprezenta printr-o sumă de potențiale de simplu și de dublu strat.

$$u(R_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \iint_S \mu\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS + \iint_S \nu\, \frac{1}{r}\, dS,$$

unde

$$\mu = \frac{1}{4\pi}\, u\Big|_S \quad \text{iar} \quad \nu = -\frac{1}{4\pi}\, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S.$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{P_0}\, u = R_0\, u = \iint_S \mu\, \frac{\partial \frac{R_0}{r}}{\partial n}\, dS + \iint_S \nu\, \frac{R_0}{r}\, dS; \tag{X.9}$$

însă, $\frac{R_0}{r} = \frac{1}{R\rho}$ este o funcție armonică de variabilele ξ_0, η_0, ζ_0, și deci integrala (X.9) este de asemenea o funcție armonică de aceste variabile, ceea ce trebuia demonstrat.

Consecința 1. *Dacă o funcție armonică satisface în exteriorul unei sfere oarecare inegalitatea*

$$|u| < AR^{n-1}, \tag{X.10}$$

această funcție se poate pune sub forma:

$$u = a_0 + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk}\, R^{2m+1}\, \frac{\partial^{i+j+k} \frac{1}{R}}{\partial x^i\, \partial y^j\, \partial z^k} + u^*, \tag{X.11}$$

$$i + j + k = m,$$

unde u^* este o funcție armonică, nulă la infinit.

Într-adevăr, dacă pentru u are loc inegalitatea (X.10)[7] atunci pentru funcția $v(P, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{P}\, u\left(\frac{1}{P}, \vartheta, \varphi\right)$ este valabilă evaluarea

$$|v| < \frac{A}{P^n}.$$

Însă, conform teoremei 4 (X), demonstrată anterior

$$v(P, \vartheta, \varphi) = \frac{a_0}{P} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk}\, \frac{\partial^m \frac{1}{P}}{\partial \xi^i\, \partial \eta^j\, \partial \zeta^k} + v^*(P, \vartheta, \varphi). \tag{X.12}$$

Funcția $\dfrac{\partial^m \frac{1}{P}}{\partial \xi^i\, \partial \eta^j\, \partial \zeta^k}$ este omogenă, avînd gradul de omo-

genitate — $(m+1)$ în raport cu variabilele ξ, η, ζ. Prin urmare

$$P^{m+1}\frac{\partial^m \frac{1}{P}}{\partial\xi^i \partial\eta^j \partial\zeta^k}$$

este o funcţie armonică omogenă de gradul zero în raport cu ξ, η, ζ şi depinde numai de rapoartele acestor mărimi. Însă, ξ, η, ζ sînt proporţionali cu x, y, z. prin urmare,

$$P^{m+1}\frac{\partial^m \frac{1}{P}}{\partial\xi^i \partial\eta^j \partial\zeta^k} = R^{m+1}\frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k},$$

de aici,

$$\frac{\partial^m \frac{1}{P}}{\partial\xi^i \partial\eta^j \partial\zeta^k} = R^{2m+2}\frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}. \qquad \text{(X. 13)}$$

Introducînd (X.13) în (X.12) şi folosindu-ne de faptul că $u = \frac{1}{R}v$, obţinem (X.11). Afirmaţia noastră este demonstrată.

Din formula (X.11) rezultă o consecinţă importantă.

Consecinţa 2. *Funcţia $u(x, y, z)$ armonică şi mărginită în exteriorul unei sfere, tinde la distanţa infinită către o limită bine determinată.*

LECŢIA XI

ECUAŢIA LUI POISSON ÎNTR-UN MEDIU NELIMITAT. POTENŢIALUL NEWTONIAN

Să trecem la cercetarea ecuaţiei lui Poisson într-un mediu nelimitat.

Lema 1. *Orice funcţie, armonică în întreg spaţiul şi nulă la infinit, este identic nulă.*

Într-adevăr, aplicînd teorema 1 (din lecţia IX) unei sfere oricît de mari, vedem că în orice punct al spaţiului valoarea funcţiei armonice considerate este oricît de mică vrem.

De aici, rezultă afirmaţia noastră.

Consecinţa 1. *Soluţia ecuaţiei lui Poissson*

$$\Delta v = -4\pi\rho(x, y, z), \qquad \text{(XI.1)}$$

definită în întreg spaţiul şi nulă la infinit, este unică.

Într-adevăr, dacă v_1 şi v_2 sînt două asemenea soluţii, atunci diferenţa lor

$$v_1 - v_2$$

este o funcţie armonică nulă, la infinit. Conform celor precedente, ea este identic nulă.

Consecinţa 2. (Teorema lui Liouville). *Orice funcţie armonică, mărginită în întreg spaţiul, este constantă.*

Într-adevăr, conform consecinţei 2 a teoremei 5 din lecţia precedentă această funcţie are la infinit o anumită limită c. Diferenţa $u - c$ fiind o funcţie armonică, nulă la infinit, va fi nulă peste tot, adică $u = c$ peste tot, ceea ce trebuia demonstrat.

Să trecem acum la rezolvarea ecuaţiei lui Poisson (XI.1) în spaţiul nelimitat.

Să considerăm funcția $\rho(x, y, z)$ integrabilă și satisfăcînd inegalitățile

$$\left.\begin{aligned} &|\rho(x,y,z)| < \frac{1}{R^{2+\alpha}}, \quad \text{dacă } R \geqslant 1, \\ \text{și} \quad &|\rho(x,y,z)| < A, \qquad \text{dacă } R < 1, \end{aligned}\right\} \tag{XI. 2}$$

unde

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ și } \alpha > 0.$$

Fără a reduce generalitatea, putem considera $\alpha < 1$, deoarece, în caz contrar, schimbarea lui α în $\alpha_1 < \alpha$ slăbește numai inegalitatea (XI.2).

Cînd sînt îndeplinite condițiile (XI.2), soluția ecuației (XI.1) se construiește ușor cu ajutorul formulei lui Green (IX.4). Fie $u(x_0, y_0, z_0)$ o soluție arbitrară a lui (XI.1). Considerînd volumul arbitrar Ω, mărginit de suprafața S, avem în baza acestei formule

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}(-4\pi\rho)\,\frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,u\,dS - \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS =$$

$$= \iiint_{\Omega}\frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,u\,dS - \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS, \tag{XI.3}$$

unde r este, ca de obicei, distanța dintre punctul (x, y, z) și punctul (x_0, y_0, z_0).

Să luăm ca volum Ω sfera cu raza R, avînd centrul în originea sistemului de coordonate și să facem ca să tindă la infinit. Atunci, primul termen al membrului drept (XI.3) va tinde către o limită bine determinată, deoarece, în baza condițiilor (XI.2) integrala de volum este convergentă. Suma celorlalți doi termeni reprezintă o funcție armonică. Vom demonstra în cele ce urmează că limita primului termen ne dă soluția problemei propuse. În baza unicității soluției demonstrate, va rezulta, de aici că, suma formată din termenul al doilea și al treilea tinde către zero.

Să demonstrăm că funcția

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{r}\,dx\,dy,\,dz, \tag{XI.4}$$

în care integrala triplă este extinsă la întreg spațiul, satisface, într-adevăr, ecuația (XI.1) și condițiile impuse.

Funcția (XI.4) se numește *potențial newtonian*, iar $\rho(x, y, z)$ este *densitatea*, așa cum am definit-o în § 3, (IX).

Să ne ocupăm, înainte de toate, de cercetarea condițiilor la infinit. Evaluînd pe $u(x_0, y_0, z_0)$ (XI.4), vom avea

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leqslant A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r\,R^{2+\alpha}}\,dx\,dy\,dz.$$

Trecînd la evaluarea ultimei integrale, observăm că mărimea ei depinde numai de $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ și dacă punem $x_0 = R_0, y_0 = 0, z_0 = 0$, aceasta nu se schimbă. Într-adevăr, este evident că această integrală nu se schimbă la o rotație a axelor de coordonate și putem alege aceste axe de coordonate, astfel, încît axa OX să treacă prin punctul (x_0, y_0, z_0). Făcînd acum schimbarea de variabile

$$x = R_0\,\xi, \quad y = R_0\,\eta, \quad z = R_0\,\zeta,$$

o aducem la forma

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R_0^3\,d\xi d\eta d\zeta}{R_0^{3+\alpha}\,P^{2+\alpha}\,P_1} = \frac{A}{R_0^{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{P_1\,P^{2+\alpha}},$$

unde $P = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, $P_1 = \sqrt{(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Ultima integrală este convergentă, deoarece: 1) pentru $P \to \infty$ expresia de sub semnul integral descrește ca $\frac{1}{P^{3+\alpha}}$; 2) în vecinătatea lui $P = 0$, singularitatea de ordinul lui $\frac{1}{P^{2+\alpha}}$ este integrabilă; 3) în vecinătatea lui $P_1 = 0$, singularitatea de ordinul $\frac{1}{P_1}$ este integrabilă.

Notînd

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{P_1\,P^{2+\alpha}}=k,$$

obținem

$$|u(x_0, y_0, z_0)|\leqslant\frac{Ak}{R_0^{\alpha}},$$

ceea ce demonstrează faptul că funcția se anulează la infinit. Să demonstrăm că u are derivate continue, care se obțin prin derivare sub semnul integral. De exemplu,

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_0}\,dx\,dy\,dz.$$

Derivarea sub semnul integral se poate efectua, evident, deoarece integrala obținută este uniform convergentă. Într-adevăr

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_0}=\frac{x-x_0}{r^3}\quad\text{și}\quad\left|\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_0}\right|\leqslant\frac{1}{r^2}.$$

Convergența integralei indicate rezultă din cel de-al doilea criteriu al lecției VII.

Astfel este demonstrată existența derivatelor de ordinul întîi, continue, pentru potențialul newtonian. Pentru a demonstra existența și continuitatea derivatelor de ordinul al doilea este necesar să impunem cîteva noi restricții funcției $\rho(x, y, z)$. Vom presupune că această funcție are derivate de ordinul întîi continue. Această restricție nu este esențială, însă înlocuirea ei cu o altă restricție mai slabă ar necesita eforturi mai mari.

Funcția ρ poate fi totdeauna descompusă în doi termeni ρ_1, ρ_2, astfel încît, în vecinătatea punctului dat (x_0, y_0, z_0), funcția ρ_2 să fie identic nulă, iar funcția ρ_1 să fie identic nulă într-o oarecare vecinătate a punctului de la infinit, adică peste tot în exteriorul unui anumit domeniu D. În felul acesta putem face

ca ρ_1 și ρ_2 să aibă la rîndul lor derivate de ordinul întîi continue. Atunci,

$$u(x_0, y_0, z_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1}{r}\,dx\,dy\,dz+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_2}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Datorită faptului că $\rho_2\equiv 0$ în vecinătatea punctului (x_0, y_0, z_0), putem exclude această vecinătate din integrala a doua și putem deriva de două ori, în raport cu parametrul, obținînd integrale uniform convergente. Să ne ocupăm de prima integrală. Vom avea, de exemplu

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1}{r}\,dx\,dy\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_1\,\frac{x-x_0}{r^3}\,dx\,dy\,dz.$$

Introducînd noi variabile $x=x_0+\xi$, $y=y_0+\eta$, $z=z_0+\zeta$, obținem:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1}{r}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi\rho_1(x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^3}}$$

și este evident că această ultimă integrală poate fi derivată în raport cu parametrii x_0, y_0, z_0. Aceasta, rezultă din faptul că integralele derivatelor vor fi uniform convergente.

Ne rămîne să demonstrăm că potențialul newtonian satisface ecuația lui Poisson.

Să considerăm funcția $\psi(x_0, y_0, z_0)$ egală cu zero peste tot, înafara unei anumite sfere C cu centrul în punctul (x_0, y_0, z_0) și avînd derivate continue pînă la un anumit ordin. Atunci, conform formulei lui Green (IX.4), observînd că în exteriorul sferei C funcțiile ψ și $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ sînt nule, obținem

$$\psi(x_0, y_0, z_0)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta\psi(x, y, z)}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Înmulțind ambii membri cu $\rho(x_0, y_0, z_0)$ și integrînd în raport cu x_0, y_0, z_0, vom avea :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0, y_0, z_0)\,\rho(x_0, y_0, z_0)\,dx_0\,dy_0,\,dz_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{6\text{ pa 3}} \frac{\Delta\psi(x, y, z)\,\rho(x_0, y_0, z_0)}{r}\,dx\,dy\,dz\,dx_0\,dy_0\,dz_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\psi(x, y, z)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{r}dx_0, dy_0, dz_0\right)dx\,dy\,dz =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z)\,\Delta\psi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \quad \text{(XI.5)}$$

Ultima integrală poate fi transformată, deoarece, pentru un domeniu suficient de mare D,

$$\iiint_D u\,\Delta\psi\,dx\,dy\,dz = \iiint_D \psi\,\Delta u\,dx\,dy\,dz.$$

Comparînd aceasta cu (XI.5), ajungem la concluzia că

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x, y, z)\,[\Delta u + 4\pi\rho]\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Din faptul că $\psi(x, y, z)$ este arbitrar, rezultă

$$\Delta u = -4\pi\rho,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

LECȚIA XII

REZOLVAREA PROBLEMEI LUI DIRICHLET PENTRU SFERĂ

Problema lui Dirichlet pentru ecuația lui Laplace, expusă în lecția II, este problema determinării unei funcții armonice în interiorul unui domeniu, dacă sînt cunoscute valorile sale pe frontieră. Putem pune problema lui Dirichlet nu numai pentru ecuația lui Laplace, ci și pentru alte ecuații de tip eliptic, înțelegînd, atunci, prin problema lui Dirichlet problema determinării unei soluții a ecuației considerate în domeniul dat, care ia valori date pe frontiera domeniului. În această lecție ne vom ocupa de rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru sferă și pusă pentru ecuația lui Poisson $\Delta u = \rho$.

Să considerăm un punct (x_0, y_0, z_0) în interiorul domeniului Ω mărginit de suprafața S. Așa cum am văzut, funcția $\frac{1}{r}$ unde

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

este soluția ecuației lui Laplace.

Aplicînd formula lui Green (IX.4) lui $\frac{1}{r}$ și unei soluții arbitrare u a ecuației lui Poisson $\Delta u = \rho$, obținem

$$u(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}u - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS - \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz. \quad \text{(XII.1)}$$

Dacă am construi o funcție armonică $g(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ astfel încît $g\big|_S = \frac{1}{r}\big|_S$, atunci, aplicînd formula lui Green lui

u și g, am avea

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}(g\,\Delta u - u\,\Delta g)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega} g\rho\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint_{S}\left(\frac{\partial g}{\partial n}u - g\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \qquad \text{(XII.2)}$$

Adunînd (XII.1) și (XII.2) și ținînd seamă de valorile lui g pe S, obținem :

$$u(x_0, y_0 z_0) = -\iiint_{\Omega}\left(\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi}\right)\rho\,dx\,dy\,dz +$$

$$+\iint_{S}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi}\right)u dS. \qquad \text{(XII.3)}$$

Notînd

$$\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi} = G(x, y, z\,;\, x_0, y_0, z_0), \qquad \text{(XII.4)}$$

avem

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint_{\Omega} G\rho\,d\Omega + \iint_{S}\frac{\partial G}{\partial n}u dS. \qquad \text{(XII.5)}$$

Funcția G se numește *funcția lui Green* : formula (XII. 5) ne dă, sub formă explicită, soluția problemei lui Dirichlet pentru Ω, în cazul ecuației lui Poisson, dacă este cunoscută funcția lui Green.

Funcția lui Green ia pe frontiera lui Ω valoarea zero și este suma funcției $\frac{1}{r}$ și a unei funcții g care este armonică peste tot în acel domeniu. Este evident că aceasta este determinată în mod unic.

Să trecem acum la rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru sferă. În acest caz, putem construi funcția lui Green sub formă explicită. Dacă punctul (x, y, z) se găsește pe sfera de rază unitate, atunci $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$. Să punem

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2 + (z-\zeta_0)^2}.$$

Conform cu (X.8) vom avea pe sfera $R = 1$:

$$\left.\frac{1}{R_0 r_1}\right|_{R=1} = \frac{1}{r}.$$

Funcția $\frac{1}{R_0 r_1}$ este, evident, o funcție armonică în interiorul sferei $R < 1$. Prin urmare, $g = \frac{1}{R_0 r_1}$

De aici,

$$G = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi R_0 r_1},$$

unde

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},\quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{x_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_0}{R_0^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{R_0}\sqrt{R^2 R_0^2 - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + 1},$$

de unde

$$G(x, y, z\,;\, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{R^2 R_0^2 - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + 1}}\right].$$

Dar cum vedem, funcția G este o funcție simetrică în raport cu argumentele (x, y, z) și (x_0, y_0, z_0). Prin urmare, ea este armonică și ca funcție de x_0, y_0, z_0 dacă $r \neq 0$.

Să verificăm acum că formula (XII.5) ne dă într-adevăr soluția problemei lui Dirichlet pentru sferă. Demonstrația noastră va consta din două părți. Vom demonstra separat că primul termen al membrului drept din formula (XII.5) ne dă soluția ecuației lui Laplace, care ia pe frontiera S valorile date, iar cel de-al doilea termen reprezintă soluția ecuației lui Poisson, egală cu zero, pe frontiera sferei Ω. Să începem cu demonstrarea celei de-a doua afirmații.

Să demonstrăm că funcția

$$u_1(x_0, y_0, z_0) = -\iiint_{\Omega} G\rho\,dx\,dy\,dz \qquad \text{(XII.6)}$$

se anulează pe frontieră și satisface ecuația lui Poisson. Pentru aceasta, este necesar să evaluăm mărimea funcției lui Green $G(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$. Să arătăm că are loc inegalitatea

$$0 < G < \frac{1}{r}. \qquad \text{(XII.7)}$$

Vom stabili înainte de toate că $G > 0$. Vom înconjura punctul interior (x_0, y_0, z_0), cu o sferă mică σ și vom considera funcția G în domeniul Ω' cuprins între sfera σ și sfera S. În acest domeniu G este o funcție armonică. Dacă sfera σ este suficient de mică, atunci pe aceasta, G va fi pozitiv, deoarece primul termen este oricît de mare vrem noi, iar cel de-al doilea este mărginit. Pe sfera S funcția G este nulă, conform definiției. Prin urmare, G este nenegativă peste tot pe frontiera lui Ω', iar pe porțiuni ale frontierei lui Ω' este pozitivă. Conform principiului minimului, ea este pozitivă peste tot în Ω'.

Pentru demonstrarea celei de-a doua inegalități (XII.7), este suficient să ne convingem de faptul că funcția g este pozitivă. Aceasta rezultă din faptul că pe frontiera lui Ω funcția ia valori pozitive și este armonică în Ω.

Din inegalitățile (XII.7) rezultă că integrala converge uniform în raport cu punctul (x_0, y_0, z_0), conform criteriului 2 din lecția VII; prin urmare, aceasta reprezintă o funcție continuă. Valoarea sa este nulă dacă (x_0, y_0, z_0) este un punct de pe frontieră, prin urmare integrala (XII.6) tinde către zero, dacă (x_0, y_0, z_0) tinde către un punct al frontierei.

Să presupunem că punctul (x_0, y_0, z_0) se găsește în interiorul sferei: să scriem integrala (XII.6) sub forma

$$u(x_0 y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega} g\rho\,dx\,dy\,dz.$$

Primul termen este potențialul newtonian și, prin urmare, aplicînd operatorul lui Laplace căpătăm pe ρ. Cel de-al doilea termen este o funcție armonică, deoarece

$$\Delta_0\left[\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega} g\rho\,dx\,dy\,dz\right] = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\rho\,\Delta_0 g\,dx\,dy\,dz = 0.$$

(Am notat aici laplacianul cu Δ_0, pentru a sublinia faptul că derivatele se iau în raport cu argumentele x_0, y_0, z_0). Prin urmare, formula (XII.6) ne dă soluția ecuației lui Poisson.

Trecînd la a doua parte a demonstrației, este util să transformăm formula (XII.5). Să notăm cu γ unghiul format de vectorii de poziție ai punctelor (x_0, y_0, z_0) și (x, y, z). Atunci distanța r, fiind latura unghiului opusă unghiului γ, se va exprima sub forma.

$$r = \sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma};$$

în mod analog se va exprima și r_1, sub forma

$$r_1 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{R_0^2} - 2\frac{R}{R_0}\cos\gamma},$$

iar funcția lui Green va avea forma

$$G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1}}\right],$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{R=1} = -\left.\frac{\partial G}{\partial R}\right|_{R=1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R - R_0\cos\gamma}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma)^{3/2}} - \frac{RR_0^2 - R_0\cos\gamma}{(R^2R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1)^{3/2}}\right]_{R=1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1 - R_0^2}{(1 - 2R_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}}.$$

Pentru cazul ecuației lui Laplace $\Delta u = 0$ și formula (XII.5) ne dă soluția problemei lui Dirichlet sub forma

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1 - R_0^2}{(1 - 2R_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} f(S)\,dS, \qquad \text{(XII.8)}$$

unde $f(S)$ sînt valorile lui $u(x_0, y_0, z_0)$ date pe sfera cu raza 1. Această formulă poartă numele de *formula lui Poisson*.

Am obținut sub formă explicită soluția problemei lui Dirichlet pentru sfera de rază 1. Formula (XII.8) ne dă posibilitatea să obținem ușor soluția și pentru o sferă de rază arbitrară P.

Să introducem funcţia armonică

$$v(R_0, \vartheta_0, \varphi_0) = u\left(\frac{R_0}{P}, \vartheta_0, \varphi_0\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1 - \left(\frac{R_0}{P}\right)^2}{\left[1 - 2\frac{R_0}{P}\cos\gamma + \left(\frac{R_0}{P}\right)^2\right]^{3/2}} f(S) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Înlocuind $P \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ prin dS, obţinem în definitiv

$$v(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi P} \iint_S \frac{P^2 - R_0^2}{(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2} P} f(S)\, dS. \quad \text{(XII.9)}$$

Trebuie să demonstrăm că funcţia $v(x_0, y_0, z_0)$ ia pe frontieră valorile $f(S)$. Formula (XII.9) aşa cum rezultă chiar din modul în care a fost obţinută, este valabilă în cazul particular cînd $f(S) \equiv 1$ şi cînd soluţia problemei lui Dirichlet există evident (ea este identic egală cu 1). Astfel, are loc egalitatea

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} dS = 1.$$

Fie S_0 un punct oarecare al suprafeţei S. Să alcătuim diferenţa

$$v(x_0, y_0, z_0) - f(S_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} [f(S) - f(S_0)]\, dS.$$

Vom arăta că această diferenţă tinde către zero, cînd punctul (x_0, y_0, z_0) tinde către S. Această demonstraţie coincide aproape cu aceea pe care am făcut-o atunci cînd am considerat ecuaţia căldurii.

Să înconjurăm punctul S_0 cu o sferă de rază η, alegînd η suficient de mic încît pentru toate punctele suprafeţei, care cad în interiorul acestei sfere, să aibă loc în baza continuităţii lui f, inegalitatea

$$|f(S) - f(S_0)| < \varepsilon,$$

unde ε este un număr pozitiv dat. Să notăm cu σ porţiunea din suprafaţa S cuprinsă în interiorul sferei de rază η, avînd centrul în S. Diferenţa scrisă mai sus poate fi reprezentată sub forma

$$v(x_0, y_0, z_0) - f(S_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S-\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} [f(S) - f(S_0)]\, dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} [f(S) - f(S_0)]\, dS = I_1 + I_2.$$

Fiind continuă, funcţia $f(S)$ este mărginită pe S, adică $|f(S)| < M$, unde M este un număr oarecare. Ultimul termen, pe care l-am notat cu I_2, se evaluează, evident, astfel

$$|I_2| = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} [f(S) - f(S_0)]\, dS \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \iint_{\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} dS <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} dS = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Primul termen I_1 admite următoarea evaluare

$$|I_1| \leqslant 2M \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{S-\sigma} \frac{P^2 - R_0^2}{P(P^2 - 2PR_0\cos\gamma + R_0^2)^{3/2}} dS =$$

$$= \frac{M}{2\pi} \iint_{S-\sigma} \frac{(P - R_0)(P + R_0)}{P[(P - R_0)^2 + 2PR_0(1 - \cos\gamma)]^{3/2}} dS.$$

Astfel, $|I_1|$ poate fi oricît de mic, dacă punctul (x_0, y_0, z_0) este luat suficient de aproape de S_0. Într-adevăr, în acest caz $1 - \cos\gamma$ va fi peste tot în exteriorul lui σ mai mare decît un anumit număr pozitiv. Înseamnă că numitorul funcţiei de sub semnul integral este mărginit inferior, iar numărătorul poate fi făcut oricît de mic vrem. Prin urmare, $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $|v(x_0, y_0, z_0) - f(S_0)| < \varepsilon$,

ceea ce trebuia demonstrat. Armonicitatea funcției $v(x_0, y_0, z_0)$ rezultă din faptul că, pentru $R_0 < P$, funcția G și prin urmare și $\frac{\partial G}{\partial n}$, este o funcție armonică de variabilele x_0, y_0, z_0.

Să ne propunem acum încă o problemă, așa-numita problemă exterioară a lui Dirichlet pentru sferă: trebuie determinată o funcție care satisface în exteriorul sferei ecuația $\Delta u = \rho$, luînd pe sfera S valori date și care tind către zero, cînd (x, y, z) tinde spre infinit. Soluția acestei probleme este, evident, unică.

Să presupunem că r reprezintă, ca mai înainte, distanța de la punctul (x, y, z) la punctul (x_0, y_0, z_0) care se găsește în exteriorul sferei și fie r_1 distanța pînă la punctul conjugat,

Atunci funcția armonică g din exteriorul sferei, care ia pe sferă valorile $\frac{1}{r}\Big|_S$, va avea, prin analogie, cu observațiile precedente, forma

$$\frac{1}{R_0 r_1}.$$

Dacă presupunem la început că funcția u se comportă la infinit ca $\frac{1}{R^\alpha}$, unde $\alpha > 0$, că derivatele sale de primul ordin descresc ca $\frac{1}{R^{\alpha+1}}$ și că cele de ordinul al doilea descresc ca $\frac{1}{R^{\alpha+2}}$, nu este greu să obținem o formulă analogă celei precedente

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint_\Omega G\rho\, dx\, dy\, dz + \iint_S \frac{\partial G}{\partial n}\, u dS,$$

unde

$$G = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi R_0 r_1}.$$

În formula scrisă, derivata funcției de sub semnul integral este considerată după normala exterioară în raport cu sfera. Aceasta este normala interioară în raport cu domeniul în care considerăm problema.

Mărginindu-ne, din nou, înainte de toate, la cazul cînd $u|_S = 0$, vedem că soluția ecuației $\Delta u = \rho$ cu condiții omogene, are forma

$$u = -\iiint_\Omega G\rho\, dx\, dydz. \qquad \text{(XII.10)}$$

Efectuînd din nou o schimbare de variabile, vom avea

$$G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1}}\right],$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = \frac{\partial G}{\partial R}\Big|_{R=1} = \frac{R_0^2 - 1}{(R_0^2 - 2R_0\cos\gamma + 1)^{3/2}}.$$

Vom verifica că formula (XII.10) ne dă soluția problemei propuse, dacă ρ devine identic nul în exteriorul unui domeniu mărginit. Cititorului îi rămîne analiza cazului general cînd, de exemplu, $|\rho| < \frac{A}{R^{2+\alpha}}$.

Să trecem la demonstrație. Ca și mai înainte, formula care exprimă valoarea lui $u_g^{\blacksquare}(x_0, y_0, z_0)$ se descompune în doi termeni, dintre care primul este soluția ecuației lui Poisson cu condiția ca soluția să se anuleze pe frontiera domeniului, iar cel de-al doilea este soluția ecuației lui Laplace, care ia pe frontieră valori date. Vom verifica valabilitatea acestei afirmații numai pentru primul termen, deoarece pentru cel de-al doilea, verificarea nu se deosebește prin nimic de cazul precedent.

Această afirmație, însă, este evidentă. Într-adevăr, pentru un R_0 suficient de mare, avem evaluările:

$$|G| \leqslant \frac{M}{R_0}, \quad \left|\frac{\partial G}{\partial n}\right| \leqslant \frac{M}{R_0}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial G}{\partial n}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}. \qquad \text{(XII.11)}$$

Prima din aceste inegalități ne dă evaluarea pentru u

$$|u| \leqslant \iiint_\Omega \max|\rho|\,\frac{M}{R_0}\, dS = 4\pi\,\frac{\max|\rho|\,M}{R_0}.$$

Satisfacerea ecuației $\Delta u = \rho$ se demonstrează ca și mai înainte; la fel se demonstrează și faptul că u se anulează pe

frontieră. Din aceleaşi evaluări (XII.11) rezultă imediat încă o consecinţă :

Dacă o funcţie armonică în exteriorul sferei de rază egală cu 1 este nulă, la infinit, atunci putem găsi o constantă M, astfel încît,

$$|u| \leqslant \frac{M}{R_0}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}. \quad \text{(XII.12)}$$

De aici, se vede că, pentru, $R_0 \to \infty$, funcţia u tinde către zero.

Într-adevăr, conform teoremei unicităţii, o astfel de funcţie trebuie că coincidă cu funcţia

$$u_1 = \int\int_S \frac{\partial G}{\partial n} u \Big|_S dS,$$

care, aşa cum am văzut mai sus, este armonică, nulă la infinit şi ia pe S aceleaşi valori ca şi u. Înseamnă, deci,

$$|u| \leqslant \int\int_S \left|\frac{\partial G}{\partial n}\right| |u|\, dS \leqslant \max |u|_S \frac{M}{R_0} 4\pi;$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_0}\right| \leqslant \int\int_S \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)\right| |u|\, dS \leqslant \max |u|_S \frac{M}{R_0^2} 4\pi \text{ ş.a.m.d.}$$

Afirmaţia noastră este demonstrată. Este uşor să înlocuim în teorema demonstrată de noi sfera cu raza 1 printr-o sferă de rază arbitrară cu ajutorul unei schimbări de variabile. Obţinem atunci

T e o r e m a 1. *Pentru orice funcţie armonică în vecinătatea punctului de la infinit şi care tinde către zero pentru $R \to \infty$ există un număr M astfel încît să aibă loc inegalităţile* (XII.12).

LECŢIA XIII

PROBLEMELE LUI DIRICHLET ŞI NEUMANN PENTRU SEMISPAŢIU

Am luat cunoştinţă de două probleme fundamentale din teoria ecuaţiei lui Laplace şi anume : problema lui Dirichlet şi problema lui Neumann.

Să amintim că problema lui Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace constă în determinarea în domeniul Ω, avînd frontiera S a funcţiei v care satisface ecuaţia

$$\Delta u = 0 \qquad \text{(XIII.1)}$$

şi condiţiile la limită

$$u|_S = f_1(S). \qquad \text{(XIII.2)}$$

Problema lui Neumann constă în căutarea unei soluţii pentru ecuaţia (XIII.1), satisfăcînd condiţia

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f_2(S). \qquad \text{(XIII.3)}$$

Funcţiile $f_1(S)$ şi $f_2(S)$ nu vor fi presupuse continue.

Să luăm pentru Ω domeniul $z > 0$: suprafaţa S va fi în acest caz planul XOY. Vom demonstra *că în acest domeniu, soluţia problemei lui Dirichlet, mărginită peste tot, este unică şi că soluţia problemei lui Neumann poate fi determinată, în afară de o constantă arbitrară.*

Pentru ca şi soluţia problemei lui Neumann să fie unică, este suficient, de exemplu, să impunem şi condiţia ca $u(x, y, z)$ să tindă către zero, cînd punctul (x, y, z) tinde către infinit, adică $|u(x, y, z)| < \varepsilon$ dacă $x^2 + y^2 + z^2 > R(\varepsilon)$.

Să presupunem, de exemplu, că problema lui Dirichlet ar avea două soluţii u_1 şi u_2. Atunci, diferenţa $v = u_1 - u_2$ va fi

o funcţie armonică, care se anulează pentru $z = 0$. Să definim pe v ca o funcţie impară de z pentru valorile negative ale lui z

$$v(x, y, z) = -v(x, y, -z).$$

Vom arăta că această funcţie va fi acum armonică în întreg spaţiul, inclusiv planul $z = 0$.

Să construim sfera σ de rază arbitrară cu centrul în planul $z = 0$ şi să determinăm funcţia v_1, armonică în interiorul domeniului mărginit de această sferă şi care ia pe σ valorile

$$v_1|_\sigma = v|_\sigma . \qquad \text{(XIII.4)}$$

Este uşor de văzut că v_1 se va anula pentru $z = 0$. Într-adevăr, funcţia

$$w_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\,[v_1(x, y, z] + v_1(x, y, -z)]$$

va fi o funcţie armonică şi se va anula pe sfera σ; prin urmare, $w_1, (x, y, 0) = 0$ Însă,

$$w_1(x, y, 0) = v_1(x, y, 0).$$

Planul $z = 0$, împarte sfera noastră în două emisfere. Funcţia v_1 coincide cu v pe frontiera fiecăreia din ele; pe suprafaţa σ aceasta rezultă din (XIII.4), iar pe porţiunea planului $z = 0$ ambele funcţii sînt nule. Prin urmare, $v = v_1$ şi deci funcţia v admite peste tot în interiorul sferei σ toate derivatele necesare şi este armonică acolo. Întrucît poziţia centrului sferei σ este arbitrară, v va fi o funcţie armonică în întreg spaţiul.

Deoarece conform ipotezei, v este mărginită în întreg spaţiul, atunci, conform teoremei lui Liouville (lecţia XI), aceasta este identic egală cu o constantă. Această constantă poate fi numai zero, întrucît $v = 0$ pentru $z = 0$.

Să demonstrăm unicitatea soluţiei pentru a doua din problemele considerate.

Fie u_1 şi u_2 două soluţii ale problemei lui Neumann pentru semispaţiu. Atunci, funcţia $v = u_1 - u_2$ satisface condiţiile

1) $\Delta v = 0$ pentru $z > 0$,

2) $\left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$

Afară de aceasta, funcţia v este mărginită în întregul semispaţiu superior datorită faptului că u_1 şi u_2 sînt mărginite.

Să definim funcţia v pentru valorile negative ale lui z, cu ajutorul formulei

$$v(x, y, z) = v(x, y, -z).$$

Vom demonstra că funcţia v astfel definită va fi armonică peste tot, inclusiv planul $z = 0$.

Să considerăm derivata

$$\frac{\partial v}{\partial z} = w(x, y, z).$$

Aceasta va fi o funcţie armonică atît în semispaţiul superior cît şi în cel inferior, satisfăcînd condiţiile

$$w(x, y, z) = -w(x, y, -z),\ w(x, y, 0) = 0,$$

şi prin urmare, cum am arătat mai sus, ea este armonică în întreg spaţiul.

Pe de altă parte, funcţia

$$\omega(x, y, z) = \int_z^{z+1} \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z}\, dz = v(x, y, z + 1) - v(x, y, z)$$

va fi de asemenea armonică în întreg spaţiul. Acest lucru se poate verifica uşor prin derivare directă.

De aici, rezultă că funcţia $v(x, y, z)$ este de asemenea armonică în întreg spaţiul. Într-adevăr, ea ar putea să nu fie armonică numai pe planul $z = 0$. Însă

$$v(x, y, z) = v(x, y, z + 1) - \omega(x, y, z). \qquad \text{(XIII.5)}$$

Membrul drept din (XIII.5) este armonic pe acest plan, prin urmare este armonic şi membrul stîng.

Datorită faptului că funcţia v este mărginită în întreg spaţiul, avem, conform teoremei lui Liouville,

$$v = \text{const.}$$

Prin urmare, soluţia problemei lui Neumann este unică pînă la un termen constant, ceea ce trebuia demonstrat.

Să trecem la rezolvarea explicită a problemelor lui Dirichlet şi Neumann.

Să presupunem că funcţia armonică, considerată de noi, satisface condiţiile

$$|u| \leqslant \frac{\mu}{R^\alpha}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}}.$$

unde $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\alpha > 0$, iar μ este o constantă.

După ce vom fi obţinut soluţia explicită a problemelor, necesitatea acestei ipoteze va cădea.

Să aplicăm funcţiei u formula lui Green (IX.4), alegînd pentru volumul Ω, emisfera cu centrul în originea sistemului de coordonate

$$R \leqslant A, \; z \geqslant 0.$$

întrucît $\Delta u = 0$, vom avea

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

unde

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Suprafaţa S constă din porţiunea S_1 a planului $z = 0$ şi din suprafaţa S_2 a emisferei $R = A$. Făcînd pe A să tindă către infinit, vedem că

$$\lim_{R \to \infty} \iint_{S_2} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Într-adevăr,

$$\left| \iint_{S_2} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \, dS \right| \leqslant \frac{1}{(A - R_0)^2} \iint_{S_2} |u| \, dS \leqslant \frac{4\pi\mu A^2}{(A - R_0)^2 A^\alpha},$$

$$\left| \iint_{S_2} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \right| \leqslant \frac{1}{A - R_0} \iint_{S_2} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS \leqslant \frac{4\pi\mu A}{(A - R_0) A^\alpha},$$

unde

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

De aceea,

$$u(x_0, y_0, z_0) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{z=0} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \qquad \text{(XIII.6)}$$

Să considerăm odată cu (x_0, y_0, z_0) şi punctul $(x_0, y_0, -z_0)$ şi fie $r_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}$. În semiplanul superior, $\frac{1}{r_1}$ este o funcţie armonică la fel ca şi u. De aceea,

$$\iiint_\Omega \left(\frac{1}{r_1} \Delta u - u \Delta \frac{1}{r_1} \right) dx \, dy \, dz = 0,$$

şi, prin urmare,

$$\iint_{S_1 + S_2} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Trecînd la limită, cînd A tinde către infinit şi folosindu-ne de aceleaşi evaluări ca şi în demonstraţia formulei (XIII.6), obţinem

$$\iint_{z=0} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Să observăm că acum în planul $z = 0$ au loc egalităţile $r_1 = r$ şi $\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ (vectorii de poziţie r_1 şi r sînt simetrici în raport cu planul $z = 0$), de unde

$$\iint_{z=0} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0. \qquad \text{(XIII.7)}$$

Adunînd (XIII.7) şi (XIII.6), obţinem

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{z=0} u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \frac{1}{2\pi}\int\int_{z=0} f_1(s) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS. \quad \text{(XIII.8)}$$

Scăzînd (XIII.7) din (XIII.6) vom avea

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{z=0} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} dS = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{z=0} \frac{1}{r} f_2(S)\, dS. \quad \text{(XIII.9)}$$

Să verificăm acum că formulele (XIII.8) şi (XIII.9) ne dau întradevăr, respectiv, soluţia problemei lui Dirichlet şi soluţia problemei lui Neumann.

Vom presupune că $f_1(S) = f_1(x, y)$ şi $f_2(S) = f_2(x,y)$ sînt funcţii continue, satisfăcînd inegalităţile

$$|f_1(x, y)| \leqslant M, \; |f_2(x, y)| \leqslant \frac{M}{\rho^{1+\alpha}}, \qquad \text{(XIII.10)}$$

unde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha > 0$, iar M este o constantă. Fără a restrînge generalitatea, putem considera că $\alpha < 1$.

Să ne convingem, mai întîi, că integralele din membrii drepţi ai acestor egalităţi, satisfac într-adevăr ecuaţia lui Laplace; aceasta rezultă din faptul că ele pot fi derivate sub semnul integral în raport cu x_0, y_0, z_0, peste tot, pentru $z_0 > 0$. Astfel de exemplu;

$$\Delta_0 \int\int_{z=0} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_1(S)\, dS = \int\int_{z=0} f_1(S) \frac{\partial}{\partial n}\left[\Delta_0\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS = 0;$$

exact la fel vom demonstra că membrul drept din (XIII.9) satisface ecuaţia. Să evaluăm comportarea membrului drept din (XIII.8) şi (XIII.9) pentru $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \to \infty$.

Să. începem cu evaluarea integralei (XIII.8). Vom arăta că această integrală este mărginită. Într-adevăr, avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_1(x, y)\, dx\, dy = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_1(x, y)\, dx\, dy.$$

Convergenţa integralei din membrul drept, cu condiţiile (XIII.10), este evidentă. Avem, mai departe:

$$\left| -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_1(x, y,)\, dx\, dy \right| \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3}\, dx\, dy =$$

$$= M \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dx\, dy.$$

Însă ultima integrală este egală cu unghiul solid sub care se vede planul $z = 0$, din punctul (x_0, y_0, z_0) şi, prin urmare, este egală cu $2\pi M$.

Astfel, obţinem evaluarea

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_1(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant 2\pi M.$$

Prin urmare, integrala (XIII.8) reprezintă o funcţie de variabilele x_0, y_0, z_0 armonică şi mărginită.

Trecînd la evaluarea funcţiei $u(x_0, y_0, z_0)$, definită cu ajutorul formulei (XIII.9), vom demonstra mai întîi, următoarea lemă

L e m ă. *Dacă* $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, *atunci este valabilă inegalitatea*

$$x^2 - 2\vartheta x + 1 \geqslant \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

Într-adevăr,

$$2\vartheta x \leqslant 2x \text{ pentru } x \geqslant 0, \quad 2\vartheta x \leqslant 0 \text{ pentru } x \leqslant 0.$$

Prin urmare,

$$2\theta x \leqslant x + |x|$$

şi

$$x^2 - 2\theta x + 1 \geqslant x^2 - x + 1 - |x|.$$

Însă $|x| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$ (aceasta rezultă din inegalitatea $|ab| \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$) şi deci,

$$x^2 - 2\theta x + 1 \geqslant \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

Pentru a putea evalua integrala (XIII.9) în punctul $x_0 = \rho_0$, $y_0 = 0$, z_0 (evaluarea, în acest punct, este suficientă datorită independenţei integralei de alegerea axelor x, y), vom pune

$$\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} = R_0, \quad \frac{x}{R_0} = \xi, \quad \frac{y}{R_0} = \eta, \quad \frac{\rho_0}{R_0} = 0.$$

Cu aceasta, avem

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} f_2(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x\rho_0 + y^2 + z_0^2 + \rho_0^2}} \frac{M}{\sqrt{(x^2 + y^2)^{1+\alpha}}}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{M}{R_0^\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi\theta + 1 + \eta^2}} \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)^{1+\alpha}}}\, d\xi\, d\eta.$$

Datorită lemei, avem

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi\theta + 1 + \eta^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{(\xi - 1)^2}{2} + \frac{\eta^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\xi - 1)^2 + \eta^2}},$$

de unde

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} f_2(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\sqrt{2}}{R_0^\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(\xi - 1)^2 + \eta^2}} \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)^{1+\alpha}}}\, d\xi\, d\eta.$$

Ultima integrală converge uniform în vecinătatea celor trei singularităţi: 1) $\xi = 1$, $\eta = 0$; 2) $\xi = 0$, $\eta = 0$ şi 3) $\xi = \infty$, $\eta = \infty$. Notînd-o cu N, avem

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} f_2(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant \frac{MN\sqrt{2}}{R_0^\alpha}.$$

Prin urmare, funcţia $u(x_0, y_0, z_0)$ se anulează la infinit, ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru a ne convinge că am obţinut soluţiile problemelor lui Dirichlet şi Neumann, ne rămîne să verificăm că sînt îndeplinite şi condiţiile pentru $z = 0$. Pentru aceasta, este suficient să stabilim că

$$\lim_{z_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_i(x, y)\, dx\, dy = f_i(x_0, y_0) \quad (i = 1,2),$$

deoarece astfel se exprimă şi valoarea limită a soluţiei problemei lui Dirichlet şi valorile limită ale derivatei normale pentru soluţia problemei lui Neumann.

Să înconjurăm punctul (x_0, y_0) cu un cerculeţ c, astfel încît în interiorul lui c să avem

$$|f_i(x, y) - f_i(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{6\pi};$$

porţiunea planului x, y rămasă după îndepărtarea lui c, o vom nota cu c'. Întrucît funcţiile $f_i(x, y)$ sînt mărginite, să presupunem că

$$|f_i(x, y)| \leqslant L.$$

Vom lua z_0 atît de mic, încît unghiul solid ω_c, sub care se vede cercul c din punctul (x_0, y_0, z_0), să fie mai mare decît

$$2\pi - \frac{\varepsilon}{3L}$$

şi prin urmare, unghiul, sub care se vede c', să fie mai mic decît $\frac{\varepsilon}{3L}$ (suma acestor unghiuri este 2π). Atunci,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_i(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_i(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{c'} \int f_i(x, y)\, d\omega =$$

$$= \int\int_{\sigma} f_i(x_0, y_0)\, d\omega + \int\int_{\sigma} [f_i(x, y) - f_i(x_0, y_0)]\, d\omega + \int\int_{\sigma'} f_i(x, y)\, d\omega;$$

$$\left| 2\pi f_i(x_0, y_0) - \int\int_{\sigma} f_i(x_0, y_0)\, d\omega \right| \leqslant \left| f_i(x_0, y_0) \left(2\pi - 2\pi + \frac{\varepsilon}{3L}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\left| \int\int_{\sigma} [f_i(x, y) - f_i(x_0, y_0)]\, d\omega \right| < \int\int_{\sigma} \frac{\varepsilon}{6\pi}\, d\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\left| \int\int_{\sigma'} f_i(x, y)\, d\omega \right| \leqslant L \int\int_{\sigma'} d\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

de unde

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_i(x, y)\, dx\, dy - 2\pi f_i(x_0, y_0) \right| \leqslant \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

LECŢIA XIV

ECUAŢIA UNDELOR ŞI POTENŢIALELOR ÎNTÎRZIATE

§ 1. Caracteristicile ecuaţiei undelor

Să considerăm ecuaţia undelor cu patru variabile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, y, z, t) \qquad \text{(XIV.1)}$$

şi să ne ocupăm înainte de toate de caracteristicile sale.

Ecuaţia suprafeţelor caracteristicilor va avea forma:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = 0, \qquad \text{(XIV.2)}$$

sau

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{dz}\right)^2 = \frac{1}{a^2}. \qquad \text{(XIV.2')}$$

Să considerăm în spaţiul cu patru dimensiuni al variabilelor (x, y, z, t) suprafaţa determinată de ecuaţia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 (t - t_0)^2 = 0. \qquad \text{(XIV.3)}$$

Suprafaţa (XIV.3) se numeşte *conoid caracteristic*. Este uşor de verificat pe cale directă că acesta satisface ecuaţia (XIV.2'). Punctul (x_0, y_0, z_0, t_0) este un punct singular pentru această suprafaţă. În acest punct suprafaţa nu are plan tangent, deoarece acolo raportul $\cos(nx) : \cos(ny) ; \cos(nz) ; \cos(nt)$, devine nedeterminat. Prin analogie cu suprafeţele din spaţiul cu trei dimensiuni numim acest punct, punct conic.

În cazul ecuaţiei vibraţiilor membranei, ecuaţia unei asemenea suprafeţe caracteristice are forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - a^2 (t - t_0)^2 = 0.$$

Aceasta este ecuația unui con din spațiul cu trei dimensiuni x, y, t, care are vîrful în punctul (x_0, y_0, t_0).

Să scriem ecuația (XIV.3) sub forma

$$t = t_0 \pm \frac{r}{a}, \qquad \text{(XIV.4)}$$

unde

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

Obținem ecuația pînzei superioare sau inferioare a conoidului după cum alegem semnul din (XIV.4). Vom folosi pînza inferioară, adică porțiunea definită de ecuația. :

$$t = t_0 - \frac{r}{a}.$$

§ 2. Metoda lui Kirchhoff pentru rezolvarea problemei lui Cauchy

Ideea metodei lui Kirchhoff de rezolvare a problemei lui Cauchy pentru ecuația undelor este aceeași ca și în rezolvarea primei probleme la limită pentru ecuațiile de tip hiperbolic (V. § 1) cu ajutorul metodei aproximațiilor succesive prezentată mai sus. Se construiește conoidul caracteristic avînd vîrful în punctul dat (x_0, y_0, z_0). Așa cum s-a explicat în lecția III, valorile funcției u și ale derivatelor sale sînt legate pe acest conoid de o anumită ecuație cu derivate parțiale, care depinde numai de trei variabile și care rezultă din (XIV.2), în virtutea ecuației undelor. După o cercetare amănunțită, se arată că această proprietate ne permite să exprimăm simplu valoarea funcției necunoscute în vîrful conoidului prin datele cunoscute, la fel cum am exprimat în lecția V valoarea funcției $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ într-un punct arbitrar de pe caracteristica $\xi = \text{const.}$, cu ajutorul valorii sale într-un alt punct oarecare al aceleeași caracteristici folosind anumite cuadraturi.

Să trecem la studiera metodei. Pentru a obține relația căutată pe conoidul caracteristic, vom proceda la fel ca în lecția III. § 4. Vom transforma ecuația (XIV.1) introducînd noile variabile independente

$$x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z$$

și

$$t_1 = t - t_0 + \frac{r}{a}.$$

Vom nota, încă,

$$u\left(x_1, y_1, z_1, t_1 + t_0 - \frac{r}{a}\right) = u_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

și analog pentru celelalte funcții.

Atunci,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial t_1}\frac{x_1 - x_0}{ra},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t_1}\frac{x_1 - x_0}{ra} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2}\frac{(x_1 - x_0)^2}{r^2 a^2} + \left(\frac{1}{ra} - \frac{(x_1 - x_0)^2}{r^3 a}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t_1}^{1)},$$

iar ecuația noastră trece în ecuația

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right) + \frac{2}{ra}\frac{\partial u_1}{\partial t_1} +$$

$$+ \left[\left(\frac{x_1 - x_0}{ra}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_0}{ra}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{ra}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} = F_1(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

unde am notat cu $\frac{\partial}{\partial r}$ expresia

$$\frac{x_1 - x_0}{r}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{y_1 - y_0}{r}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{z_1 - z_0}{r}\frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Operatorul $\frac{\partial}{\partial r}$ înseamnă derivata luată după direcția razei r, dusă din punctul (x_0, y_0, z_0) în punctul (x_1, y_1, z_1). Într-adevăr $\frac{x_1 - x_0}{r} = \cos(xr)$, $\frac{y_1 - y_0}{r} = \cos(yr)$, $\frac{z_1 - z_0}{r} = \cos(zr)$.

---

1) Este evident că în substituția noastră $r_1 = r$ și de aceea vom scrie de aici înainte peste tot r.

Deoarece, $\left(\frac{x_1-x_0}{ar}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{ar}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_0}{ar}\right)^2-\frac{1}{a^2}=0,$

ecuația noastră se scrie sub forma

$$\Delta u_1+\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]=F_1(x_1,y_1,z_1,t_1),$$

sau

$$\frac{1}{r}\Delta u_1+\frac{2}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]=\frac{1}{r}F_1(x_1,y_1,z_1,t_1). \qquad \text{(XIV.5)}$$

Formula (XIV.5) ne permite să construim dintr-odată o soluție particulară de mare importanță a ecuației undelor. Fie $F_1=0$ a unei funcții $u_1=\frac{\Phi(t_1)}{r}$ în care Φ_1 este o funcție arbitrară de două ori derivabilă, ne dă o soluție a ecuației (XIV.5) în baza faptului că $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}=\frac{1}{r}\Phi'(t_1)$ și că ambii termeni ai membrului stîng (XIV.5) se anulează. Punînd în locul lui t expresia sa în variabilele x, y, z și t, obținem : $u=\frac{1}{r}\Phi\left(t-t_0+\frac{r}{a}\right)$. În cazul de față, parametrul t_0 nu este esențial și putem considera soluția sub forma

$$u=\frac{1}{r}\Phi_1\left(t+\frac{r}{a}\right).$$

Este ușor de verificat că

$$u=\frac{1}{r}\Phi_3\left(-t+\frac{r}{a}\right)$$

va fi de asemenea o soluție a ecuației undelor, deoarece ecuația undelor nu se schimbă atunci cînd înlocuim pe t cu $-t$. Punînd $\Phi_3\left(-t+\frac{r}{a}\right)=\Phi_2\left(t-\frac{r}{a}\right)$ obținem, adunînd ambele soluții particulare,

$$u=\frac{1}{r}\left[\Phi_1\left(t+\frac{r}{a}\right)+\Phi_2\left(t-\frac{r}{a}\right)\right]. \qquad \text{(XIV.6)}$$

Formula (XIV.6) ne amintește, după aspectul ei exterior, de formula lui D'Alembert pentru soluția ecuației coardei vibrante.

Soluțiile date de această funcție poartă denumirea de *unde sferice*. Primul termen reprezintă o undă de formă constantă care converge către punctul $r=0$. Pe măsură ce această undă se apropie de centrul ei, amplitudinea sa crește.

Al doilea termen reprezintă o undă de formă constantă care se propagă de la punctul $r=0$ către infinit. Această undă se deosebește, de asemenea, de undele considerate la coardă prin aceea că amplitudinea sa descrește întocmai ca $\frac{1}{r}$, cînd $r\to\infty$.

Dacă Φ_1 și Φ_2 sînt diferite de zero numai pe un interval finit de variație a argumentului lor, atunci în fiecare punct al spațiului, pînă la apariția undelor sferice și după trecerea lor, funcția u devine nulă, cu alte cuvinte se restabilește repausul.

Așa cum vom vedea mai tîrziu, rolul acestor soluții pentru ecuația undelor este asemănător cu rolul pe care îl are funcția $\frac{1}{r}$ pentru ecuația lui Laplace.

Să integrăm ambii membri ai ecuației (XIV.5) într-un anumit domeniu Ω al spațiului x_1, y_1, z_1, conținînd în interiorul său punctul (x_0, y_0, z_0). Notăm cu S frontiera domeniului Ω. Pentru comoditate, vom separa din acest domeniu punctul (x_0, y_0, z_0) cu ajutorul unei sfere mici σ de rază ε, iar apoi vom trece la limită pentru $\varepsilon\to 0$, Volumul mărginit de sfera σ va fi notat cu litera τ.

Obținem

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Omega-\tau}\left[\frac{1}{r}\Delta u_1+\frac{2}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1=$$

$$=\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}F_1(x_1,y_1,z_1,t_1)\,dx_1\,dy_1\,dz_1. \qquad \text{(XIV.7)}$$

Înainte însă de a trece în membrul stîng la limită, noi îl vom transforma întrucîtva.

Conform formulei lui Green (IX.4), avem

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Omega-\tau}\frac{1}{r}\Delta u_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1=\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1=$$

$$=-4\pi u_1(x_0,y_0,z_0,t-t_0)+\iint_S\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)dS; \qquad \text{(XIV.8)}$$

deoarece t_1 este egal cu $t - t_0$ pentru $x_1 = x_0, y_1 = y_0, z_1 = z_0$. Mai departe, introducînd coordonatele sferice

$$dx_1, dy_1, dz_1 = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr,$$

vom avea

$$I_\sigma = \iiint_{\Omega-\tau} \frac{2}{ar^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \right] dx_1 \, dy_1 \, dz_1 =$$

$$= \frac{2}{a} \iiint_{\Omega-\tau} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \right] \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr =$$

$$= \frac{2}{a} \int_{S+\sigma} \int \int r \frac{\partial u_1}{\partial t_1} [-\operatorname{sign} \cos (r, n)] \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2}{a} \int_{S+\sigma} \int r \frac{\partial u_1}{\partial t_1} d\omega,$$

unde am notat cu ω unghiul solid [v. (IX.8)]. Continuînd transformările, obținem

$$I_\sigma = \frac{2}{a} \int_{S+\sigma} \int r \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = -\frac{2}{a} \int_{S+\sigma} \int \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} dS.$$

Limita lui $\iint_\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} dS$ este evident nulă, dacă $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}$ este mărginit. Într-adevăr, $\frac{\partial r}{\partial n}$ este mărginit, iar integrala este mai mică decît

$$\frac{M}{\varepsilon} \int_\sigma \int dS = 4\pi \varepsilon M,$$

în care M este o constantă; prin urmare

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} I_\sigma = -\frac{2}{a} \int_S \int \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r_1}{\partial t_1} dS, \qquad \text{(XIV.9)}$$

Formulele (XIV.7), (XIV.8) și (XIV.9) ne dau

$$-4\pi u_1 (x_0, y_0, z_0, t - t_0) + \int_S \int \left(u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{2}{ra} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \right) dS =$$

$$= \int_\Omega \int \int \frac{1}{r} F_1 (x_1, y_1, z_1, t_1) \, dx_1, dy_1, dz_1.$$

Să punem acum $t_1 = 0$; atunci, $t = t_0 - \frac{r}{a}$. Dacă, în afară de aceasta, $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, atunci $t = t_0$. De aceea,

$$u_1 (x_0, y_0, z_0, 0) = u (x_0, y_0, z_0, t_0),$$

$$F_1 (x_1, y_1, z_1, 0) = F \left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a} \right)$$

și formula noastră se scrie astfel

$$u (x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \left(u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{2}{ra} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \right) \Bigg|_{t_1 = 0} dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \int \int \frac{1}{r} F \left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a} \right) dx \, dy \, dz. \qquad \text{(XIV.10)}$$

Formula (XIV.10) se numește *formula lui Kirchhoff*. Așa cum vom vedea imediat, ea ne permite să găsim soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația undelor.

Prin forma sa exterioară, această formulă ne amintește foarte mult cu formula lui Green, stabilită anterior. Dacă presupunem u_1, $\frac{\partial u_1}{\partial n}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}$ date pe suprafața S, membrul drept al lui (XIV.10) va reprezenta o funcție cunoscută. În membrul drept al acestei formule se găsește o integrală care, de obicei, se numește potențial întîrziat. Să lămurim această denumire dată ultimei integrale

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Omega \int \int \frac{1}{r} F \left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a} \right) dx \, dy \, dz. \qquad \text{(XIV.11)}$$

Prin forma sa integrala de mai sus se deosebește de potențialul newtonian numai prin aceea că funcția F intră nu cu argumentul t_0, ci cu argumentul întîrziat $t_0 - \frac{r}{a}$.

Să trecem la rezolvarea problemei lui Cauchy, adică la rezolvarea ecuației (XIV.1), cu condițiile

$$\left.\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi_0(x, y, z), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \varphi_1(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.12)}$$

Vom considera drept suprafață $t_0 - \frac{r}{a} = 0$; atunci vom avea pe ea $t = 0$ pentru $t_1 = 0$.

Domeniul, mărginit de S este o sferă de rază at_0 în jurul punctului x_0, y_0, z_0 și, prin urmare, îi putem aplica formula (XIV. 10). Pentru $t = 0$, condițiile (XIV.12) determină toate derivatele de ordinul întîi ale lui u și, prin urmare, ale lui u_1.
Vom avea

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z);$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cos(nx) + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\cos(ny) + \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\cos(nz) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\cos(ny) +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\cos(nz) = \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}$$

și, prin urmare,

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \frac{1}{a}\varphi_1(x, y, z)\frac{\partial r}{\partial n},$$

și, în sfîrșit,

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{r=at_0}\int\left(\varphi_0\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}\varphi_1\right)dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\iiint_{r\leqslant at_0}\frac{1}{r}F\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right)dx\,dy\,dz. \qquad \text{(XIV.13)}$$

Formula (XIV.13) ne dă expresia explicită a valorii funcției necunoscute în orice punct (x_0, y_0, z_0), oricare ar fi timpul $t_0 > 0$.

Prin aceasta, se demonstrează și unicitatea soluției problemei lui Cauchy pentru ecuația undelor, dacă această soluție există. Vom arăta în continuare că funcția obținută de noi satisface ecuația și condițiile inițiale; vom verifica, de asemenea, dacă problema lui Cauchy a fost corect pusă.

Formulei (XIV.13) îi putem da pentru cazul $F = 0$ încă o expresie, care se numește *formula lui Poisson* și pe care o întîlnim adesea în literatură.

Să notăm cu $T_\rho\{\psi\}$ media aritmetică a valorilor funcției ρ pe sfera de rază ψ, descrisă în jurul punctului (x_0, y_0, z_0),

$$T_\rho\{\psi\} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\rho, \vartheta, \varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$

în care ρ, ϑ, φ sînt coordonatele sferice avînd originea în punctul (x_0, y_0, z_0) și legate de coordonatele carteziene rectangulare prin intermediul formulelor

$$x = x_0 + \rho\sin\vartheta\cos\varphi;$$

$$y = y_0 + \rho\sin\vartheta\sin\varphi;$$

$$z = z_0 + \rho\cos\vartheta;$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi.$$

Folosind această notație, putem transcrie formula (XIV.13) sub următoarea formă

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = t_0\,Tat_0\{\varphi_1\} + \frac{\partial}{\partial t_0}[t_0\,Tat_0\{\varphi_0\}]$$

Să verificăm acest lucru. Într-adevăr, pe suprafața $\rho = at_0$ avem

$$\frac{\partial\rho}{\partial n} = -\frac{\partial\rho}{\partial\rho} = -1,$$

$$dS = a^2t_0^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$

și, prin urmare,

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\rho=at_0}\frac{1}{a\rho}\frac{\partial\rho}{\partial n}\varphi_1\,dS=\frac{t_0}{4\pi}\iint\limits_{\rho=at_0}\varphi_1(\rho,\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Mai departe,

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial\rho},\quad \frac{\partial\frac{1}{\rho}}{\partial n}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\rho}=\frac{1}{a^2t_0^2},$$

de unde obținem după cîteva calcule simple

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\rho=at_0}\left(\varphi_0\frac{\partial\frac{1}{\rho}}{\partial n}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\rho=at_0}\varphi_0\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi+$$

$$+t_0\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\rho=at_0}\varphi_0\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să semnalăm cîteva consecințe importante care rezultă din formula (XIV.13).

Să ne închipuim că nu avem forțe perturbatoare exterioare, adică $F=0$ și că perturbația inițială este concentrată la momentul $t=0$ într-un anumit domeniu mărginit ω. Vom cerceta comportarea soluției într-un punct oarecare (x_0, y_0, z_0), care se găsește în exteriorul domeniului ω. Să presupunem că distanța de la domeniul ω la punctul (x_0, y_0, z_0) este δ. Pentru $t_0<\frac{\delta}{a}$, sfera S a cărei ecuație este $r=at_0$, se va găsi în întregime în exteriorul lui ω și de aceea rezultatul substituției acestei valori t_0 în membrul drept al lui (XIV.13) ne dă zero. Pentru $t_0=\frac{\delta}{a}$ funcția u începe să se modifice, ceea ce se întîmplă atît timp cît S intersectează domeniul ω. Apoi, pentru $t_0=\frac{D}{a}$, în care D este distanța maximă a punctelor din domeniul ω la punctul (x_0, y_0, z_0), u devine din nou zero, rămînînd nul și în continuare. Cu cît punctul (x_0, y_0, z_0) este mai depărtat de domeniul ω, cu atît mai tîrziu va ajunge acolo perturbația și cu atît mai tîrziu ea va trece prin acest punct.

În fiecare moment dat t_0, vom putea construi o suprafață S_1, care separă punctele la care perturbația nu a ajuns încă de cele la care perturbația a ajuns. Această suprafață poartă numele de *frontul de undă anterior.*

O altă suprafață S_2 separă punctele în care excitația există, încă de acelea în care oscilațiile au încetat. Această suprafață poartă numele de *frontul de undă posterior.*

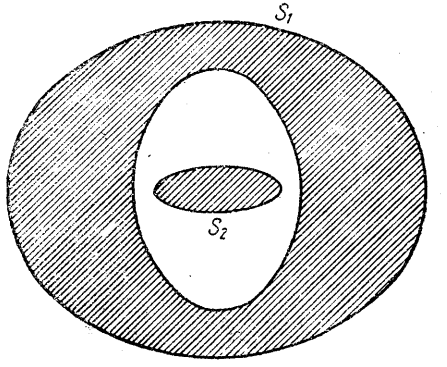

Fig. 12

Prezența frontului de undă posterior explică faptul că sunetul produs de o sursă oarecare nu se stinge treptat într-un anumit punct al spațiului, ci se stinge brusc, imediat după trecerea undei. Dacă această împrejurare nu ar avea loc, sunetele s-ar contopi unele cu altele, ca și sunetele unui pian a cărui pedală este apăsată în mod prelungit.

În fig. 12 sînt reprezentate frontul de undă anterior și posterior, care apar în urma unei perturbații, într-un domeniu mărginit ω.

Să trecem la demonstrarea faptului că problema lui Cauchy este corect pusă.

Dacă în locul funcțiilor φ_0 și φ_1 introducem în formula (XIV.13) alte două funcții φ_0^* și φ_1^*, astfel încît

$$\varphi_0-\varphi_0^*<\varepsilon,\ \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial x}\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial y}\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial z}\right|<\varepsilon,$$

$$|\varphi_1-\varphi_1^*|<\varepsilon,$$

soluția u^* a problemei lui Cauchy, după cum rezultă din formula (XIV.13), va diferi puțin pentru noile date inițiale de soluția pentru cele vechi, deoarece

$$u^*-u|=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left|\iint\limits_{r=at_0}\left[(\varphi_0^*-\varphi_0)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right)-\frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}(\varphi_1^*-\varphi_1)\right]ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\varepsilon,$$

unde M este o constantă arbitrară, depinzînd numai de t_0.

Prin urmare, soluția u depinde de funcția φ_0 în mod continuu pînă la ordinul $(1, 0)$ și de funcția φ_1 în mod continuu pînă la ordinul $(0, 0)$ în sensul lecției II.

Să arătăm acum că soluția obținută de noi satisface într-adevăr ecuația.

Vom observa, înainte de toate, că este suficient să efectuăm demonstrația pentru cazul cînd φ_0 și φ_1 sînt identic nule, deoarece, putem stabili, atunci existența soluției pentru orice funcții φ_0 și φ_1 continuu de două ori derivabile. Într-adevăr, dacă vom arăta că soluția există pentru condiții inițiale nule, stabilim prin aceasta existența soluției și pentru ecuația

$$\Delta w - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F - \Delta v + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

cu condițiile

$$w\Big|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

în care v este o funcție arbitrară.

Dacă v satisface condițiile

$$v\Big|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1,$$

și asemenea funcții există evident, de exemplu $v = \varphi_0 + t\varphi_1$, atunci existența funcției $u = w + v$, care satisface condițiile lui Cauchy și ecuația undelor (XIV.1), este asigurată. Dacă soluția acestei ultime probleme există, ea se exprimă în mod obligatoriu cu ajutorul formulei (XIV.13).

Punînd în formula (XIV.13) $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, obținem

$$u = (x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leq at_0} \frac{1}{r} F\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right) dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XIV.14)}$$

Să arătăm că funcția $u(x_0, y_0, z_0, t)$ determinată de formula (XIV.14) satisface într-adevăr ecuația. Verificarea directă a acestei proprietăți ar necesita calcule greoaie, așa că preferăm să alegem o altă cale.

Vom demonstra o identitate integrală importantă și echivalentă, într-un anumit sens, cu ecuația undelor pentru funcția u, determinată de formula (XIV.10).

Să considerăm funcția arbitrară $\psi(x_0, y_0, z, t)$, care se anulează peste tot, în afara unei anumite sfere c din spațiul cu patru dimensiuni, cu centrul în punctul (x_0, y, z, t), și avînd peste tot derivate continue pînă la un ordin convenabil.

Această funcție satisface unei ecuații

$$\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Phi \qquad \text{(XIV.15)}$$

în care Φ se calculează prin derivare directă.

Conform ipotezei noastre,

$$\psi\Big|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0$$

pentru un T suficient de mare. Atunci, funcția ψ, ca soluție a problemei lui Cauchy pentru ecuația (XIV.15), se poate reprezenta pentru $t < T$ prin formula

$$\psi(x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leq a(T-t_0)} \frac{1}{r}\,\Phi\left(x, y, z, t_0 + \frac{r}{a}\right) dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XIV.16)}$$

(Nu am demonstrat această formulă, ea putînd fi obținută imediat, astfel : înlocuim de la început în ecuație pe t cu $T - t^*$ și transformăm datele, scriem apoi soluția ecuației, revenind din nou de la variabila t^* la variabile t).

În formula (XIV.16), am fi putut lăsa de o parte limitele de integrare, deoarece, pentru $r \geqslant a(T - t_0)$, funcția $\Phi\left(x, y, z, t_0 + \frac{r}{a}\right)$, devine evident nulă, pentru că $t_0 + \frac{r}{a} \geqslant T$.

Să presupunem că $F(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$ pentru $t_0 < 0$.

Să înmulțim funcția $\psi(x_0, y_0, z_0, t_0)$ cu $F(x_0, y_0, z_0, t_0)$ și să integrăm în întreg spațiul. Vom avea

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0, y_0, z_0, t_0)\, F(x_0, y_0, z_0, t_0)\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, dt_0 = \\ = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0, y_0, z_0, t_0) \times \\ \times \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r}\,\Phi\left(x, y, z, t_0 + \frac{r}{a}\right) dx\, dy\, dz\right\} dx_0\, dy_0\, dz_0\, dt_0.$$

Ultima integrală poate fi scrisă sub forma

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\,\Phi\left(x, y, z, t_0+\frac{r}{a}\right)\times$$

$$\times F(x_0, y_0, z_0, t_0)\,dx\,dy\,dz\,dx_0\,dy_0\,dz_0\,dt_0.$$

Într-adevăr, funcția de sub semnul integral este diferită de zero în domeniul mărginit al variabilelor sale independente. Dacă $\frac{r}{a}$ sau t_0 sînt suficient de mari, atunci $t_0+\frac{r}{a}$ va fi de asemenea mare, întrucît $t_0>0$. Să facem o schimbare de variabile, punînd $t_0+\frac{r}{a}=t$.

Atunci, este valabilă formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,F(x_0, y_0, z_0, t_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0\,dt_0 =$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x, y, z, t)\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\,F\left(x_0, y_0, z_0, t-\frac{r}{a}\right)dx_0\,dy_0\,dz_0\right\}dx\,dy\,dz\,dt.$$

Într-adevăr, integrala interioară are sens, deoarece funcția de sub semnul integral este diferită de zero pentru x, y, z, t fixați numai într-un domeniu mărginit. De aici,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x, y, z, t)\,F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\Delta\psi-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)u(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt, \quad \text{(XIV.17)}$$

unde

$$u(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\,F\left(x_0, y_0, z_0, t-\frac{r}{a}\right)dx_0dy_0dz_0,$$

Identitatea (XIV.17) este acea identitate integrală fundamentală pe care o satisface funcția u. Vom arăta că dacă u are derivate de ordinul al doilea continue, aceasta satisface ecuația (XIV.1). Într-adevăr, operatorul

$$\Delta-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

este, cum se poate vedea ușor, autoadjunct [v. § 2 (V)].

De aceea, integrala

$$\int\int_{\Omega}\int\int\left[u\left(\Delta\psi-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)-\psi\left(\Delta u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$=\int\int_{\Omega}\int\int\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}+\frac{\partial P_t}{\partial t}\right)dx\,dy\,dz\,dt$$

se transformă într-o integrală extinsă la suprafața S, care mărginește volumul Ω [v. (V. 15)].

Dacă luăm volumul Ω suficient de mare încît pe suprafața S funcția ψ și toate derivatele sale de ordinul întîi să fie nule, membrul drept al ultimei egalități se anulează și obținem

$$\int\int_{\Omega}\int\int u\left(\Delta\psi-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$=\int\int_{\Omega}\int\int\psi\left(\Delta u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt,$$

de aici, în baza lui (XIV.17), rezultă

$$\int\int_{\Omega}\int\int\psi(x, y, z, t)\left[\Delta u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-F\right]dx\,dy\,dz\,dt=0.$$

Ultima integrală se anulează, oricare ar fi ψ, de unde

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F.$$

Prin aceasta, este demonstrat faptul că funcția u satisface ecuația.

Ne rămîne să demonstrăm că $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t_0} = 0$ pentru $t_0 = 0$. Anularea lui u este o consecință directă a formulei (XIV.14). Pentru a arăta că $\frac{\partial u}{\partial t_0} = 0$ pentru $t = 0$, facem o schimbare de variabile în integrala care se găsește în membrul drept al lui (XIV.14), punînd

$$x = x_0 + at_0\xi,\ y = y_0 + at_0\eta,\ z = z_0 + at_0\zeta,;$$

atunci,

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = at_0\rho,$$

în care

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

În noile variabile, avem

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= -\frac{a^2 t_0^2}{4\pi}\iiint\limits_{\rho\leq 1}\frac{1}{\rho}F[x_0 + at_0\xi, y_0 + at_0\eta, z_0 + at_0\zeta, t_0(1-\rho)]d\xi\, d\eta d\zeta.$$

Membrul drept poate fi derivat sub semnul integral. După aceasta, punînd $t_0 = 0$, avem

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t_0}\right|_{t_0=0} = 0.$$

Presupunînd că derivatele de ordinul întîi ale lui F sînt mărginite, rezultă valabilitatea operației de derivare sub semnul integral, v. § 2 lecția VII.

Nu ne-am oprit intenționat, aici, asupra chestiunii referitoare la numărul de derivate continue necesare în condițiile inițiale, pentru ca formulele noastre să dea problemei soluția înzestrată cu un număr dat de derivate continue. Așa cum vom vedea mai departe, această chestiune nu este chiar atît de importantă,

dacă ne vom folosi de noțiunea de soluții generalizate ale ecuației undelor.

Să mai facem încă o observație importantă.

După cum am văzut, soluția ecuației coardei vibrante a fost la fel de netedă ca și condițiile inițiale, adică a admis tot atîtea derivate continue cîte au admis și funcțiile conținute în condițiile inițiale.

Soluția ecuației conductibilității căldurii s-a dovedit a fi mai netedă decît condițiile inițiale.

Soluția ecuației undelor se deosebește în această privință de problemele considerate. Ea este, în general, mai puțin netedă decît condițiile inițiale. Acest lucru se vede chiar și numai din faptul că valoarea funcției u se exprimă în formula lui Kirchhoff printr-o integrală a derivatei normale.

Expresia derivatei de ordinul k, satisfăcînd aceeași ecuație, este legată, astfel, de valorile inițiale ale derivatelor de ordinul $k + 1$ ale datelor inițiale.

Am studiat în această lecție numai problema lui Cauchy în cazul cînd datele inițiale se referă la suprafața $t = 0$. Totuși aceeași metodă ne permite să construim soluția problemei lui Cauchy și în cazul general, cînd condițiile inițiale sînt date pe o hipersuprafață $t = \psi(x, y, z)$, precum și soluția ecuației, analogă primei probleme la limită a ecuațiilor hiperbolice din plan.

Recomandăm cititorului analiza amănunțită a acestor probleme.

LECȚIA XV

PROPRIETĂȚILE POTENȚIALELOR DE SIMPLU STRAT ȘI DE DUBLU STRAT

§ 1. Observații generale

Pentru a analiza problemele lui Dirichlet și Neumann și pentru alte domenii decît sfera și semispațiul vom fi nevoiți să studiem separat comportarea integralelor

$$I_1 = \int\int_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} f_1(S)\, dS \quad \text{și} \quad I_2 = \int\int_S \frac{f_2(S)\, dS}{r}, \tag{XV.1}$$

pe care le-am întîlnit de nenumărate ori. Așa cum am amintit mai sus, integrala I_2 se numește potențial de simplu strat, iar funcția $f_2(S)$ este densitatea sa. Integrala I_1 se numește *Potențial de dublu strat*, iar $f_1(S)$ este *densitatea sa*. Vom presupune funcțiile $f_2(S)$ și $f_1(S)$ continue.

Vom numi suprafața S netedă în sensul lui Liapunov sau mai simplu, suprafață Liapunov, dacă vor fi îndeplinite următoarele condiții:

a) Suprafața S admite peste tot plan tangent.

b) În jurul fiecărui punct P_0 al suprafeței se poate descrie o sferă de rază h, care nu depinde de P_0, în interiorul căreia cade numai o porțiune Σ a suprafeței S și care întîlnește dreptele paralele cu normala n_0 în punctul P_0, cel mult o singură dată.

c) Dacă P_1, și P_2 sînt două puncte ale suprafeței iar $\vec{n}_1$ și $\vec{n}_2$ sînt vectorii unitate, orientați după normala exterioară la suprafața S în aceste puncte, vectorul $\vec{n}_1 - \vec{n}_2$ satisface inegalitatea

$$|\vec{n}_1 - \vec{n}_2| \leqslant Ar^{\delta},$$

în care A și δ sînt constante; $0 < \delta \leqslant 1$, iar r este distanța dintre punctele P_1 și P_2.

d) Unghiul solid ω_σ, sub care este văzută o porțiune oarecare σ a suprafeței S dintr-un punct arbitrar P_0, este mărginit

$$|\omega_\sigma| \leqslant K.$$

(Dacă dreptele care pornesc din P_0 întîlnesc suprafața S de mai multe ori, atunci, luînd pentru σ mulțimea porțiunilor lui S, văzute dinspre partea pozitivă, putem obține $\omega_\sigma > 4\pi$ și, în general, un număr oricît de mare. De aceea, o asemenea limitare este esențială.

Vom considera la început cazul cînd S este o suprafață finită, netedă, în sensul lui Liapunov, și închisă. Fie Ω domeniul cuprins în interiorul lui S.

Să ne ocupăm de analiza mai amănunțită a caracterului integralelor care intră în expresia potențialului de simplu strat și a potențialului de dublu strat.

Să cercetăm comportarea acestor integrale în vecinătatea unui punct arbitrar P al suprafeței. Pentru comoditate vom alege sistemul de coordonate, astfel, încît punctul de cercetat P de pe suprafață să cadă în origine, planul tangent în acest punct să coincidă cu planul XOY, iar axa OZ să coincidă cu direcția normalei interioare. Să presupunem că ecuația locală a suprafeței S este

$$z = \zeta(x, y);$$

atunci,

$$\zeta(0, 0) = \frac{\partial \zeta(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial \zeta(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

§ 2. Proprietățile potențialului de dublu strat

Să considerăm înainte de toate potențialul de dublu strat

$$w = \int\int_S f_1(S) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS. \tag{XV.2}$$

Expresia $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ reprezintă, evident, o funcție de două puncte variabile: punctul (x_0, y_0, z_0), care ocupă o poziție oarecare în

spațiu, și punctul (x, y, z), situat pe suprafața S. Derivata se ia după direcția normalei exterioare la suprafața S în punctul (x, y, z).

Să demonstrăm cîteva propoziții simple în legătură cu acest potențial.

Lema 1. *Să notăm cu φ unghiul pe care îl formează direcția normalei într-un punct arbitrar al suprafeței S cu vectorul de poziție dus din acest punct în punctul (x_0, y_0, z_0). Atunci potențialul de dublu strat poate fi scris sub forma*

$$w = \int_S \int f_1(S) \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS. \qquad \text{(XV.3)}$$

Să demonstrăm formula (XV.3). Este evident că cosinusurile unghiurilor formate de vectorul dus din punctul (x, y, z) la punctul (x_0, y_0, z_0) cu axele de coordonate vor fi respectiv egale cu

$$\frac{x_0 - x}{r}, \frac{y_0 - y}{r}, \frac{z_0 - z}{r}$$

Prin urmare,

$$\cos\varphi = \frac{x_0 - x}{r}\cos(nx) + \frac{y_0 - y}{r}\cos(ny) + \frac{z_0 - z}{r}\cos(nz) = -\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Lema este demonstrată.

Lema 2. *Potențialul de dublu strat își păstrează sensul dacă în locul punctului (x_0, y_0, z_0) introducem un punct care se găsește pe suprafața S.*

Pentru demonstrația acestei afirmații, vom introduce în formula (XV.3) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Să punem în evidență pe suprafața S porțiunea S_1, conținînd originea, astfel încît z să fie pe S_1 o funcție uniformă de x și y. Porțiunea S_2 rămasă nu influențează asupra convergenței integralei.

Atunci, integrala va avea forma

$$w_{S_1} = \int\int_{S_1} f_1(S) \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS =$$

$$= -\int\int_{S_1} f_1(S) \left(\frac{x}{r^3}\cos(nx) + \frac{y}{r^3}\cos(ny) + \frac{z}{r^3}\cos(nz) \right) dS.$$

Să evaluăm mărimea

$$-\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{x}{r^3}\cos(nx) + \frac{y}{r^3}\cos(ny) + \frac{z}{r^3}\cos(nz).$$

Avem

$$\cos(nx) = \vec{n}\vec{i},\ \cos(ny) = \vec{n}\vec{j},\ \cos(nz) = \vec{n}\vec{k}$$

în care $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sînt vectorii unitate, orientați după axele de coordonate. Mai departe, $\vec{n}_0 = \vec{k}$, și de aceea

$$\cos(nx) = \vec{n}\vec{i} - (\vec{n} - \vec{n}_0)\vec{i},$$
$$\cos(ny) = \vec{n}\vec{j} = (\vec{n} - \vec{n}_0)\vec{j},$$
$$\cos(nz) = \vec{n}\vec{k} = (\vec{n} - \vec{n}_0)\vec{k} + \vec{n}_0\vec{k} = 1 + (\vec{n} - \vec{n}_0)\vec{k},$$

de unde, folosind condițiile ca suprafața să fie netedă în sensul lui Liapunov, rezultă :

$$|\cos(nx)| < Ar^\delta,$$
$$|\cos(ny)| < Ar^\delta, \qquad \text{(XV.4)}$$
$$|\cos(nz)| > 1 - Ar^\delta.$$

Să evaluăm încă mărimea lui z.

Conform teoremei creșterilor finite, avem

$$z(x, y) = x\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\xi,\eta} + y\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\xi,\eta},$$

în care (ξ, η) este un punct anumit, care se găsește pe segmentul care unește originea sistemului de coordonate cu punctul (x, y).

După cum se știe, însă, din cursul de geometrie diferențială,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(nx)}{\cos(nz)},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(ny)}{\cos(nz)},$$

de unde

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant \frac{Ar^\delta}{1 - Ar^\delta};\ \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant \frac{Ar^\delta}{1 - Ar^\delta}.$$

Luînd în considerare că $|x| \leqslant \rho, |y| \leqslant \rho$, unde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

obţinem pentru punctele din interiorul sferei $Ar^\delta < \frac{1}{3}$ inegalităţile

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant \frac{3}{2} Ar^\delta ; \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant \frac{3}{2} Ar^\delta ; |z| \leqslant 3A\rho r^\delta \leqslant \rho. \qquad \text{(XV.5)}$$

Pentru punctele care se găsesc în interiorul sferei indicate $Ar^\delta < \frac{1}{3}$, este valabilă inegalitatea

$$\rho \leqslant r \leqslant 2\rho.$$

Prima inegalitate este evidentă, iar a doua rezultă din faptul că $r = \sqrt{\rho^2 + z_2} \leqslant \sqrt{2\rho^2} \leqslant 2\rho$. Aceasta ne permite să simplificăm inegalităţile (XV.5). Avem

$$|z| \leqslant 3A2^\delta \rho^{1+\delta} \leqslant 6A\rho^{1+\delta}.$$

Astfel, obţinem din (XV.4)

$$\begin{aligned} &|\cos(nx)| \leqslant 2^\delta A\rho^\delta \leqslant 2A\rho^\delta, \\ &|\cos(ny)| \leqslant 2A\rho^\delta, \\ &|\cos(nz)| > 1 - 2A\rho^\delta. \end{aligned} \qquad \text{(XV.6)}$$

Introducînd aceste evaluări în expresia lui $\frac{\cos\varphi}{r^2}$, obţinem

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < 2A\rho^{-2+\delta} + 2A\rho^{-2+\delta} + 6A\rho^{-2+\delta} < \frac{10A}{\rho^{2-\delta}}.$$

De aici, rezultă integrabilitatea lui $f_1(S)\frac{\cos\varphi}{r^2}$. Prin urmare, integrala noastră are, într-adevăr, sens.

Aşa cum vom stabili acum, w este o funcţie discontinuă care suferă un salt la trecerea sa prin suprafaţa S. Să notăm cu w_0 mărimea potenţialului de dublu strat obţinut prin înlocuirea lui x_0, y_0, z_0 din formula (XV.3) cu un punct de pe suprafaţa S; w_0 este o funcţie de punctul de pe suprafaţă.

Teorema 1. *Funcţia w tinde către limite diferite, atunci, cînd (x_0, y_0, z_0) tinde către suprafaţa S dinspre exterior sau dinspre*

interior. Dacă notăm cu w_e limita din exterior a valorilor lui w şi cu w_i limita din interior a valorilor lui w, au loc formulele

$$\left.\begin{aligned} w_e &= -2\pi f_1(S) + w_0, \\ w_i &= 2\pi f_1(S) + w_0. \end{aligned}\right| \qquad \text{(XV.7)}$$

Pentru demonstrarea formulelor (XV.7), să considerăm pe w. Vom avea

$$\begin{aligned} w(P) &= \iint_S [f_1(S) - f_1(P_0)] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + \iint_S f_1(P_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \\ &= w_1(P) + w_2(P), \end{aligned} \qquad \text{(XV.8)}$$

în care am notat cu P_0 un punct arbitrar fixat al suprafeţei S. Primul termen din formula (XV. 8) pe care l-am notat cu $w_1(P)$ este o funcţie continuă în punctul P_0. Aceasta rezultă din convergenţa uniformă a integralei în acest punct [v. § 1 (VII)], care se poate stabili uşor. Într-adevăr, să înconjurăm punctul P_0 cu un domeniu atît de mic, încît să avem

$$|f_1(S) - f_1(P_0)| < \varepsilon,$$

unde S este un punct aparţinînd domeniului $\sigma(\varepsilon)$.

Atunci, oricare ar fi punctul P, care se găseşte într-o vecinătate oarecare $h(\varepsilon)$ a punctului P_0, vom avea

$$\begin{aligned} &\left|\iint_\sigma [f_1(S) - f_1(P_0)] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS\right| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon \iint_\sigma \left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right| dS = \varepsilon \iint_{\sigma_1} d\omega - \varepsilon \iint_{\sigma_2} d\omega, \end{aligned}$$

în care r este distanţa dintre punctul P, aparţinînd vecinătăţii $h(\varepsilon)$ a punctului P_0 şi punctul S al suprafeţei σ: am notat cu σ_1 porţiunea σ care este văzută din punctul P sub un unghi solid pozitiv, iar cu σ_2 acea porţiune din σ care este văzută din P sub un unghi solid negativ. Pentru o suprafaţă S suficient de netedă şi, în orice caz, pentru o suprafaţă Liapunov, ambele integrale

$$\iint_{\sigma_1} d\omega \quad \text{şi} \quad \iint_{\sigma_2} d\omega,$$

vor fi mărginite, în baza condiţiei d[1]). Aceasta este suficientă pentru continuitatea lui w_1. Al doilea termen din formula (XV.8) se calculează uşor

$$w_2(P) = \iint_S f_1(P_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = f_1(P_0) \iint_S d\omega = f_1(P_0)\ \omega_S(P),$$

unde $\omega_S(P)$ este mărimea unghiului solid sub care este văzută suprafaţa S din punctul P.

Să presupunem că w_{2e}, w_{2i}, w_0. înseamnă respectiv limitele lui w_2 dinspre exterior şi dinspre interior precum şi valoarea lui w atunci cînd înlocuim punctul P prin punctul P_0 al suprafeţei S. Pentru a cunoaşte aceste mărimi, ne rămîne să studiem comportarea lui $w_S(P)$ cînd traversăm suprafaţa S în punctul P.

Să presupunem că punctul P_0 traversează suprafaţa S mişcîndu-se din interior spre exterior. Atît timp cît P_0 se găseşte în interiorul domeniului mărginit de suprafaţa S, avem $\omega_S(P_0) = 4\pi$. De îndată ce P_0 a străbătut suprafaţa S şi se găseşte în exteriorul ei, avem $\omega_S(P_0) = 0$. Prin urmare, funcţia $\omega_S(P_0)$ suferă un salt cînd străbate suprafaţa S. Rămîne să determinăm valoarea lui $\omega_S(P_0)$ cînd P_0 este un punct de pe suprafaţa S. În acest scop, să înconjurăm punctul P_0 cu o sferă mică σ de rază η şi să considerăm curba l de-a lungul căreia sfera σ se intersectează cu suprafaţa S. Curba l separă suprafaţa sferei în două părţi una σ_1 interioară în raport cu S şi alta σ_2 exterioară în raport cu S. Aceeaşi curbă împarte suprafaţa S în două părţi, o parte S_1, exterioară în raport cu σ şi alta S_2 interioară, în raport cu σ. Partea exterioară S_1 împreună cu σ_1 formează o suprafaţă închisă în exteriorul căreia se găseşte punctul P_0. Prin urmare, unghiul solid, sub care este văzută suprafaţa S_1 din punctul P_0, este egal cu unghiul sub care este văzută din P_0 porţiunea de sferă σ_1.

Pentru a calcula unghiul solid, sub care este văzută din punctul P_0 suprafaţa S, este suficient să determinăm unghiul

[1]) În cursurile mai dezvoltate de teoria potenţialului, de exemplu, *Günter* „La théorie du potentiel", se pun în evidenţă acele condiţii pe care trebuie să le satisfacă suprafaţa pentru ca $\iint_S \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| dS$ să fie mărginită.

sub care este văzută suprafaţa S_1, şi să trecem la limită, făcînd ca raza η a sferei σ să tindă către zero. Conform celor anterioare, aceasta revine la găsirea limitei unghiului sub care este văzută din P_0 porţiunea σ_1 a sferei σ. Nu este greu de arătat că această limită este egală cu 2π. Să intersectăm sfera σ cu planul tangent la S în punctul P_0. În baza celor demonstrate mai înainte, distanţa de la punctele curbei l la planul tangent nu depăşeşte $6A\eta^{1+\delta}$. Astfel, curba l se găseşte în întregime în interiorul zonei de pe sfera σ, determinată de inegalitatea $|z| \leqslant 6A\eta^{1+\delta}$.

Să construim pe σ un sistem de coordonate geografice, luînd normala la S în punctul P_0 drept axă polară.

În acest sistem de coordonate, zona, în interiorul căreia este cuprinsă cu certitudine curba l, este mărginită de paralelele α_0, latitudine sudică, şi α_0, latitudine nordică, unde

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{6A\eta^{1+\delta}}{\eta} = \arcsin 6A\eta^{\delta}.$$

Unghiul α_0 tinde evident către zero. Prin urmare, σ_1 tinde către aria emisferei, ceea ce înseamnă că unghiul solid sub care se vede σ_1 din P_0 tinde către 2π. Astfel, $\omega_S(P_0) = 2\pi$, dacă P_0 se găseşte pe suprafaţa S.

De aici,

$$(\omega_S)_e = -2\pi + (\omega_S)_0, \quad (\omega_S)_i = 2\pi + (\omega_S)_0.$$

Atunci, vom avea pentru

$$w_{2e} = -2\pi f_1(P_0) + (w_2)_0;\ w_{2i} = 2\pi f_1(P_0) + (w_2)_0.$$

Din continuitatea lui w_1 şi din formula (XV.8), rezultă imediat formulele (XV.7). Deoarece P_0 este un punct arbitrar al suprafeţei S, teorema noastră este demonstrată.

§ 3. Proprietăţile potenţialului de simplu strat

Vom cerceta potenţialul de simplu strat la fel ca şi în paragraful precedent.

Să alegem din nou sistemul de coordonate, aşa cum a fost indicat la începutul acestei lecţii. Fie

$$v(P) = \iint_S \frac{1}{r} f_2(S)\, dS. \qquad \text{(XV.9)}$$

Să observăm, înainte de toate, că integrala (XV.9) este uniform convergentă, dacă funcția f_2 este mărginită și continuă, și prin urmare, este o funcție continuă peste tot inclusiv suprafața S. Într-adevăr, dacă excludem din suprafața S acea parte σ, care este în interiorul sferei mici de rază η, descrisă în jurul punctului arbitrar P_0, în celelalte puncte ale lui S funcția de sub semnul integral va fi mărginită și continuă. Integrala pe σ va fi oricît de mică vrem pentru un η suficient de mic, independent de P_0. Prin urmare, integrala (XV.9) este continuă, ca funcție de punctul P_0, peste tot și în particular în orice punct al suprafeței S.

Să formăm derivata $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ și să trecem la studierea acestiea. Vom avea

$$\frac{\partial v}{\partial z_0} = \iint_S \frac{z - z_0}{r^3} f_2(S)\, dS.$$

Se vede că $\frac{z - z_0}{r}$ este cosinusul unghiului făcut cu direcția axei z de vectorul dus din punctul (x, y, z) în punctul (x_0, y_0, z_0) cu semn schimbat.

De aceea, notînd acest unghi cu ψ_0, putem pune pe $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ sub forma

$$\frac{\partial v}{\partial z_0} = -\iint_S f_2(S) \frac{\cos \psi_0}{r^2}\, dS. \qquad \text{(XV.10)}$$

Să demonstrăm două propoziții:

Lema 3. *Integrala* (XV.9) *își păstrează sensul atunci cînd introducem în ea în locul lui* (x_0, y_0, z_0) *un punct al suprafeței și reprezintă o funcție continuă de punctul* P_0.

Într-adevăr, punînd $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ în formula (XV.10) și folosindu-ne de faptul că

$$|z| \leqslant M\rho^{1+\delta}, \text{ unde } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[v. (XV.5)], demonstrăm ușor această afirmație.

Vom nota o asemenea integrală cu

$$\frac{\partial v}{\partial n_0} = \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0} f_2(S)\, dS.$$

Să notăm cu $\frac{\partial v(P_0)}{\partial n_i}$ și $\frac{\partial v(P_0)}{\partial n_e}$ respectiv valorile limită ale derivatei normale atunci cînd punctul P se apropie de punctul P_0 al suprafeței S din interior și din exterior.

Teorema 2. *Dacă funcția* f_2 *este continuă, au loc următoarele formule*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n_e} &= 2\pi f_2(P_0) + \frac{\partial v}{\partial n_0}, \\ \frac{\partial v}{\partial n_i} &= -2\pi f_2(P_0) + \frac{\partial v}{\partial n_0}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV.11)}$$

Pentru demonstrație, vom compara pe $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ cu potențialul de dublu strat avînd densitatea $-f_2(S)$.

Să scriem

$$\frac{\partial v}{\partial z_0} - w = \iint_S f_2(S) \frac{\cos \varphi - \cos \psi_0}{r^2}\, dS. \qquad \text{(XV.12)}$$

Vom demonstra că această diferență este continuă în punctul (0, 0, 0).

Într-adevăr

$$\frac{\cos \varphi - \cos \psi_0}{r^2} = -\frac{x - x_0}{r^3}\cos(nx) - \frac{y - y_0}{r^3}\cos(ny) - \frac{z - z_0}{r^3}[\cos(nz) - 1].$$

Pentru simplicitate vom presupune că punctul x_0, y_0, z_0, se mișcă de-a lungul normalei la suprafață, cu alte cuvinte $x_0 = y_0 = 0$.

Atunci,

$$\frac{\cos \varphi - \cos \psi_0}{r^2} = -\frac{x\cos(nx)}{r^3} - \frac{y\cos(ny)}{r^3} - \frac{z - z_0}{r^3}[\cos(nz) - 1].$$

Folosind evaluările (XV.6), avem

$$|x\cos(nx)| \leqslant A_1\rho^{1+\delta};\ |y\cos(ny)| < A_1\rho^{1+\delta},\ |1 - \cos(nz)| < A_1\rho^{\delta},$$

unde A_1 este o constantă.

Observînd, de asemenea, că

$$|z - z_0| < r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2},$$

obținem

$$\left| \frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2} \right| \leqslant \frac{2A_1\rho^{1+\delta}}{r^3} + \frac{A_1\rho^{\delta}}{r^2} \leqslant \frac{3A_1}{\rho^{2-\delta}}$$

Aceasta, înseamnă că integrala (XV.12) converge uniform în raport cu parametrul z_0 și reprezintă o funcție continuă în punctul $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

De aici, rezultă

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0=+0} = \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0=-0} = \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0=0}$$

Folosind teorema 1 din această lecție, obținem de aici imediat formulele (XV.11).

Să observăm încă o proprietate importantă. Evaluarea mărimii $\frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2}$ conduce la o funcție continuă în raport cu punctul suprafeței S. De aceea, derivata $\frac{\partial u}{\partial z_0}$ va tinde uniform către valoarea sa limită pe întreaga suprafață S.

T e o r e m a 3. *Pentru orice funcție mărginită $f_2(S)$, funcția $\frac{\partial v}{\partial n}$ este continuă.*

Demonstrația acestei teoreme rezultă imediat din faptul că integrala

$$\iint_S f_2(S)\frac{\cos\psi_0}{r^3}\,dS$$

este uniform convergentă. Într-adevăr, sub semnul integral se găsește produsul unui factor mărginit cu funcțiunea $\frac{\cos\psi_0}{r^3}$ care, în baza lui (XV.6), nu depășește pe $6A\rho^{-2+\delta}$. Conform criteriului 3 de convergență uniformă din lecția VII, integrala este uniform convergentă și prin urmare reprezintă o funcție continuă.

T e o r e m a 4. *Dacă densitatea potențialului de simplu strat satisface condiția*

$$|f_2(P_1) - f_2(P_2)| \leqslant Kr_3^{\delta_1}, \qquad \text{(XV.13)}$$

unde $\delta_1 < 0$ iar r_3 este distanța dintre punctele P_1 și P_2, atunci potențialul va avea derivate de ordinul întîi continue peste tot, inclusiv suprafața, pe orice direcție pararelă cu planul tangent, de ambele părți ale suprafeței considerate.

Să alegem din nou originea sistemului de coordonate în punctul de cercetat P_1 a suprafeței și, ca plan XOY, planul tangent la suprafață.

Să considerăm derivata

$$\frac{\partial v}{\partial x_0} = \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} f_2(S)\,dS$$

într-un anumit punct P_0 de coordonate 0, 0, z_0, care se găsește pe normală. Să demonstrăm că această derivată este continuă în toate punctele normalei deci și în $z_0 = 0$.

Într-adevăr, avem

$$\frac{\partial v}{\partial x_0} = \iint_S \frac{x}{r^3} f_2(S)\,dS.$$

Să construim în jurul axei z un cilindru de rază h astfel, încît în punctele din vecinătatea lui P_0 ale porțiunii S a suprafeței S, situată în interiorul acestui cilindru, normala la S să formeze cu axa z un unghi care să nu depășească $\frac{\pi}{4}$. Să arătăm că în acest caz $|z| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = \rho$. Într-adevăr, $z = \int_0^{\rho} \frac{dz}{d\rho}\,d\rho$, $|z| \leqslant \rho \max\left|\frac{dz}{d\rho}\right|$. Însă, în baza condiției

$$|\cos(nz)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

avem

$$\frac{dz}{d\rho} \leqslant \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 1,$$

de unde rezultă inegalitatea noastră.

Fie $r^* = \sqrt{x^2+y^2+z_0^2}$. Să construim integrala

$$\iint_{S^*} f_2(P_1)\frac{x}{r^{*3}}\cos(nz)\,dS.$$

Această integrală este evident nulă, deoarece ea poate fi transcrisă sub forma

$$f_2(P_1)\iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2}\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z_0^2)^3}}\,dx\,dy,$$

unde sub semnul integral se găsește o funcție impară de x.

Este clar că continuitatea lui $\frac{\partial v}{\partial x_0}$ va fi stabilită dacă vom demonstra continuitatea integralei

$$\iint\limits_{S^*}x\left(\frac{f_2(S)}{r^3}\right)dS \text{ sau } \iint\limits_{S^*}x\left(\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P)\cos(nz)}{r^{*3}}\right)dS. \quad \text{(XV.14)}$$

Nu este greu să ne convingem de convergența uniformă în punctul P_1 a acestei ultime integrale.

Într-adevăr, avem

$$\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P_1)}{r^{*3}}\cos(nz)=\frac{f_2(S)-f_2(P_1)}{r^3}+\frac{f_2(P_1)[1-\cos(nz)]}{r^3}+$$
$$+f_2(P_1)\cos(nz)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{*3}}\right). \quad \text{(XV.15)}$$

Să evaluăm separat fiecare din termenii membrului drept al formulei (XV.15). Avem $r=\sqrt{x^2+y^2+(z-z_1)^2}\geqslant\rho$; $r^*>\rho$;

$$r^3=\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3\leqslant\sqrt{2}\rho,$$

$$\left|\frac{f_2(S)-f_2(P_1)}{r^3}\right|\leqslant\frac{Kr_3^{\delta_1}}{r^3}\leqslant\frac{K_1}{\rho^{3-\delta_1}}.$$

Din (XV.4), rezultă

$$\left|\frac{f_2(P_1)[1-\cos(nz)]}{r^3}\right|\leqslant|f_2(P_1)|A\frac{\rho^\delta}{r^3}\leqslant\frac{K_2}{\rho^{3-\delta}}.$$

Mai departe,

$$\left|\frac{1}{r^3}=\frac{1}{r^{*3}}\right|=|r-r^*|\left\{\frac{1}{r^3r^*}+\frac{1}{r^3r^{*2}}+\frac{1}{rr^{*3}}\right\}.$$

Diferența vectorilor $\vec{r}$ și $\vec{r^*}$ reprezintă un segment de lungime z. De aceea, în baza lui (XV.5), avem

$$|\vec{r}-\vec{r^*}|\leqslant|z|\leqslant K\rho^{1+\delta}.$$

Folosindu-ne de aceasta, avem

$$\left|\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{*3}}\right|\leqslant K_3\rho^{1+\delta}\left\{\frac{1}{r^3r^*}+\frac{1}{r^3r}+\frac{1}{r^1r^{*3}}\right\}\leqslant K_4\frac{1}{\rho^{3-\delta}}.$$

Revenind la integrala (XV,14), vedem că ea poate fi transcrisă sub forma

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2}\frac{x}{\cos(nz)}\left(\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P_1)\cos(nz)}{r^{*3}}\right)dx\,dy.$$

Funcția de sub semnul integral din această integrală nu depășește

$$\sqrt{2}\rho\left(\frac{K_1+K_2+K_4}{\rho^{3-\delta}}\right)=\frac{K_5}{\rho^{2-\delta}}.$$

Prin urmare, integrala este uniform convergentă.

Am stabilit că, atunci cînd punctul P_0 tinde pe normală către punctul de pe suprafață, toate derivatele de ordinul întîi ale potențialului de simplu strat tind către o limită finită bine determinată.

Din demonstrația noastră rezultă, între altele, că această trecere la limită se face în mod uniform în raport cu punctul de pe suprafață. Prin urmare, derivatele de ordinul întîi ale potențialului de simplu strat vor fi, în ipotezele noastre, continue peste tot, inclusiv frontiera, ceea ce demonstrează teorema.

§ 4. Derivata normală regulată

În cele ce urmează va trebui să aplicăm formula lui Green la funcții armonice, care nu se prezintă sub forma potențialelo de simplu sau dublu strat. Pentru a avea posibilitatea de a face aceasta, trebuie să impunem restricții suplimentare suprafeței S.

Să facem înainte de toate o observație importantă. Formula lui Green (V.16) a fost obținută de noi în ipoteza că derivatele de ordinul întîi ale funcțiilor u și v sînt continue peste tot, inclusiv frontiera și în presupunerea că Δu și Δv sînt integrabile în interiorul domeniului.

Să presupunem că suprafața S are proprietatea că în reprezentarea sa parametrică, funcțiile

$$x=x(\lambda,\mu),$$
$$y=y(\lambda,\mu), \quad \text{(XV.16)}$$
$$z=z(\lambda,\mu),$$

admit derivate continue în raport cu parametrii pînă la ordinul al doilea inclusiv.

Să construim în fiecare punct al acestei suprafețe normala n și să aplicăm pe această normală un segment de lungime constantă ζ. Locul geometric al extremităților acestor segmente este definit de ecuațiile

$$x_1 = x + \zeta \cos nx,$$
$$y_1 = y + \zeta \cos ny,$$
$$z_1 = z + \zeta \cos nz.$$

Această mulțime de puncte formează o anumită suprafață S_1 care poate fi denumită *suprafață paralelă* cu suprafața S.

Ne putem ușor convinge de faptul că suprafața S_1 are plan tangent care variază continuu. Pentru aceasta să considerăm ecuația suprafeței S sub forma parametică (XV.16). Componentele vectorului normalei $n_x(\lambda, \mu)$, $n_y(\lambda, \mu)$, $n_z(\lambda, \mu)$ sînt continuu derivabile odată în raport cu λ și μ. Introducînd aceste expresii în ecuațiile pentru x_1, y_1, z_1, obținem reprezentarea parametrică a suprafeței S_1, care va admite, evident, derivate de ordinul întîi continue în raport cu λ și μ, ceea ce înseamnă că suprafața S va avea plan tangent care variază continuu.

Să presupunem că funcțiile u și v sînt astfel încît funcțiile Δu și Δv sînt continue în interiorul domeniului Ω. Să presupunem că u și v admit o derivată normală continuă pe orice suprafață S_1 „ paralelă " cu S și care se găsește în interiorul ei.

Să presupunem de asemenea că derivatele normale $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1}$ și $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{S_1}$, definite pe suprafața S_1, tind uniform către funcțiile limită continue $\varphi_1(S)$ și $\varphi_2(S)$. Vom numi aceste funcții derivatele normale ale lui u și v pe suprafața S și le vom nota cu $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ și $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S$.

Vom spune, în acest caz, că funcțiile u și v au derivate normale regulate.

Teorema 5. *Dacă u și v sînt două funcții armonice în domeniul Ω care admit derivate normale regulate, este valabilă pentru ele formula lui Green*

$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = 0.$$

Demonstrația acestei teoreme este evidentă. Este suficient să aplicăm formula lui Green suprafeței S_1, „ paralelă " cu suprafața S și să trecem apoi la limită, cînd S_1 tinde către S.

Din lema 2 a acestei lecții rezultă că, dacă densitatea $f_2(S)$ este continuă, potențialul de simplu strat admite o derivată normală regulată.

§ 5. Derivata normală a potențialului de dublu strat

Pentru potențialul de dublu strat obținem condiția de existență a derivatei normale regulate sub forma următoarei teoreme.

Teorema lui Liapunov. *Pentru ca soluția ecuației lui Laplace*

$$\Delta u = 0,$$

cu condiția

$$u|_S = f(s),$$

în domeniul Ω mărginit de suprafața S_1 (soluția problemei lui Dirichlet) să admită o derivată normală regulată, este necesar și suficient ca potențialul de dublu strat W, format cu ajutorul funcției $f(S)$:

$$W = \frac{1}{4\pi} \iint_S f \, \partial \frac{1}{r} \, dS,$$

să admită o derivată normală regulată atît dinspre exterior cît și dinspre interior și ca aceste două derivate normale să coincidă.

Vom demonstra această teoremă. Să considerăm funcția $w(P_0)$.

$$w(P_0) = \begin{cases} u - W, \text{ dacă } P_0 \text{ este în interiorul lui } \Omega; \\ \\ -W, \text{ dacă } P_0 \text{ este în exteriorul lui } \Omega. \end{cases}$$

Funcția $w(P_0)$ va fi armonică atît în interiorul domeniului Ω cît și în exteriorul său. Se poate demonstra că ea este continuă în întreg spațiul. Într-adevăr, saltul funcției $w(P_0)$ la trecerea prin suprafața S, așa cum se vede ușor, este

$$u(P_0)|_S - f(S) = 0.$$

Dacă funcția $u(P_0)$ admite o derivată normală regulată $\frac{\partial u}{\partial n}$, atunci funcția $w(P_0)$ va coincide cu potențialul de simplu strat

$$V(P_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

avînd același salt pentru derivata normală ca și u. Într-adevăr, în interiorul domeniului Ω, avem, în baza formulei lui Green:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S f\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS - \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

și, prin urmare, $w(P_0) - V(P_0) = 0$ peste tot în interiorul lui Ω. Datorită faptului că această diferență este continuă, ea va fi și în exteriorul lui Ω. De aici, însă rezultă că ea va fi identic nulă, ceea ce înseamnă că avem

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_S f\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS = \begin{cases} u(P_0) + \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS, & \text{dacă } P_0 \text{ este în interiorul lui } \Omega; \\ \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS, & \text{dacă } P_0 \text{ este în exteriorul lui } \Omega. \end{cases}$$

Astfel, potențialul de dublu strat W poate fi scris ca diferența a două funcții care au derivată normală regulată de ambele părți ale suprafeței S și, prin urmare, admite el însuși de ambele părți ale suprafeței o derivată normală regulată. Saltul acestei derivate este evident nul. Prin urmare, valorile limită ale derivatei normale din interior și exterior coincid.

Am demonstrat necesitatea condiției din teoremă. Vom arăta acum suficiența acestei condiții. Să observăm înainte de toate că dacă va exista derivata normală regulată exterioară continuă a funcției W, funcția w poate fi considerată în exteriorul lui Ω ca fiind soluția problemei lui Neumann cu valori continue date pentru derivata normală exterioară

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_e = \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_e.$$

Soluția acestei probleme, însă, așa cum vom vedea în lecția XIX, poate fi reprezentată sub forma unui potențial de simplu strat V^*, avînd densitatea $\nu(S)$ continuă. Un asemenea potențial va coincide peste tot cu funcția $w(P_0)$, deoarece diferența lor $V^*(P_0) - w(P_0)$ este continuă în întreg spațiul și identic nulă în exteriorul lui Ω.

Aceasta înseamnă că derivata normală regulată $\frac{\partial w}{\partial n_0}$ dinspre interior va exista. În interiorul domeniului Ω, avem, însă,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial n}.$$

Din existența derivatelor normale regulate ale lui w și W rezultă existența derivatei normale regulate a lui u, ceea ce trebuia demonstrat.

§ 6. Comportarea potențialelor la infinit

Ultima proprietate importantă a potențialelor de simplu și dublu strat, pe care o vom examina acum, este comportarea lor la infinit.

Vom demonstra că dacă suprafața S este mărginită, potențialul de simplu strat descrește, cînd R_0 tinde spre infinit, cel puțin ca $\frac{1}{R_0}$, iar potențialul de dublu strat, cel puțin ca $\frac{1}{R_0^2}$, unde $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

Într-adevăr, este evident că pentru un R_0 suficient de mare, obținem

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + (x^2 + y^2 + z^2)} =$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\ \sqrt{1 - \frac{2(xx_0 + yy_0 + zz_0) - (x^2 + y^2 + z^2)}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}} \geqslant$$

$$\geqslant R_0\sqrt{1 - \frac{2RR_0 - R^2}{R_0^2}} \geqslant \frac{1}{2}R_0.$$

Aceasta înseamnă că

$$|v| = \left| \iint_S \frac{1}{r} f_2(S)\, dS_i \right| \leqslant \frac{2}{R_0} \iint_S |f_2(S)|\, dS,$$

$$|w| = \left| \iint_S \frac{\cos \varphi}{r^2} f_1(S)\, dS \right| \leqslant \frac{4}{R_0^2} \iint_S |f_1(S)|\, dS,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

LECŢIA XVI

REDUCEREA PROBLEMELOR LUI DIRICHLET ŞI NEUMANN LA ECUAŢIILE INTEGRALE

§ 1. Punerea problemelor şi unicitatea soluţiilor lor

Fie S o suprafaţă închisă şi suficient de netedă. Să notăm cu Ω_1 volumul mărginit de această suprafaţă iar cu Ω_2 domeniul infinit, exterior în raport cu S, mărginit de asemenea de suprafaţa S.

Vom analiza patru probleme:

1. Problema interioară a lui Dirichlet care constă în a găsi funcţia u, armonică în Ω_1 cu condiţia

$$u|_S = f_1(S).$$

2. Problema exterioară a lui Dirichlet care constă în a găsi funcţia u, armonică în Ω_2, cu condiţiile

$$\text{a) } u|_S = f_1(S),$$

$$\text{b) } \lim_{R \to \infty} u = 0$$

3. Problema interioară a lui Neuman, care constă în a găsi funcţia u, armonică în Ω_1, cu condiţia

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f_2(S).$$

4. Problema exterioară a lui Neumann care constă în a găsi funcţia u, armonică în Ω_2, cu condiţiile

$$\text{a) } \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f_2(S),$$

$$\text{b) } \lim_{R \to \infty} u = 0$$

Înainte de a trasa căile de rezolvare ale acestor probleme să ne ocupăm de analiza lor.

Teorema 1. *Soluţia problemei lui Dirichlet, atît a celei interioare cît şi a celei exterioare este unică.*

Demonstraţia este evidentă. Ea rezultă din principiul maximului. Diferenţa a două soluţii va fi, în cazul problemei interioare, o funcţie armonică, nulă pe S; în cazul problemei extrerioare, diferenţa a două soluţii va fi nulă pe S şi la infinit. Prin urmare, diferenţa soluţiilor nu poate lua în interiorul domeniului nici valori pozitive, nici valori negative, deoarece şi-ar atinge acolo maximul său pozitiv sau minimul său negativ, ceea ce este imposibil. Înseamnă că, în ambele cazuri, diferenţa soluţiilor este nulă.

Teorema 2. *Soluţia problemei exterioare a lui Neumann, avînd derivate de ordinul întîi continue, peste tot, inclusiv frontiera, este unică, soluţia problemei interioare fiind determinată în afară de o constantă arbitrară.*

Să analizăm la început problema interioară. Fie integrala

$$\iint_S v \frac{\partial v}{\partial n}\, dS =$$

$$= -\iiint_{\Omega_1} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= -\iiint_{\Omega_1} \left[v\, \Delta v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz.$$

Dacă v este o funcţie armonică, iar $\frac{\partial v}{\partial n}$ se anulează pe frontieră, atunci

$$\iiint_{\Omega_1} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz = 0,$$

şi deci

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 .$$

De aici, rezultă că v, este o constantă.

Fie acum u_1, u_2 două soluţii ale problemei interioare a lui Neumann. Diferenţa lor v este o funcţie armonică a cărei derivată normală este nulă pe frontiera domeniului. Conform celor

demonstrate, o asemenea funcţie este o constantă. Teorema este demonstrată pentru cazul problemei interioare.

Problema interioară a lui Neumann nu admite totdeauna o soluţie. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca ea să admită o soluţie este ca

$$\iint_S f_2\,(S)\, dS = 0.$$

Necesitatea acestei condiţii rezultă în mod evident din formula lui Green. Suficienţa o vom stabili mai tîrziu.

Pentru analizarea problemei exterioare, să luăm o sferă Σ de rază A, unde A este un număr suficient de mare şi fie Ω_3 volumul cuprins între Σ şi S. Conform celor precedente,

$$\iint_\Sigma v \frac{\partial v}{\partial n}\, dS + \iint_S v \frac{\partial v}{\partial n}\, dS =$$

$$= -\iiint_{\Omega_3} \left[v\, \Delta v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz.$$

Dacă v este o funcţie armonică, nulă la infinit, şi pentru care $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0$, atunci membrul stîng al ultimei egalităţi este oricît de mic vrem noi. Într-adevăr, în baza teoremei 1 din lecţia XII, avem pe Σ

$$|v| \leqslant \frac{M}{A}, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| \leqslant \frac{M}{A^2}$$

şi

$$\left| \iint_\Sigma v \frac{\partial v}{\partial n}\, dS \right| \leqslant \frac{M^2}{A^3} \iint_\Sigma dS = 4\pi \frac{M^2}{A}.$$

Înseamnă

$$\iiint_{\Omega_3} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz < \varepsilon,$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$, ceea ce este posibil numai cu condiţiile

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Rezultă că v este o constantă. Această constantă, însă, poate fi numai zero, deoarece altfel aceasta nu s-ar anula la infinit.

Diferenţa dintre două soluţii a problemei exterioare a lui Neumann este de aceea nulă, iar soluţia problemei lui Neumann este unică.

§ 2. Ecuaţiile integrale ale problemelor formulate

Proprietăţile potenţialelor obţinute de noi în lecţia precedentă ne permite să rezolvăm problemele lui Dirichlet şi Neumann pentru orice domenii mărginite de suprafeţe suficient de netede reducîndu-le la ecuaţii integrale.

Într-adevăr, să presupunem că am dori să găsim, de exemplu, soluţia problemei interioare a lui Dirichlet. Vom presupune că funcţia necunoscută u este un potenţial de dublu strat w avînd o densitate $\mu(S)$, deocamdată necunoscută,

$$u = w = \iint_S \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\, dS_1.$$

După cum se ştie, potenţialul de dublu strat este o funcţie armonică. Trebuie să supunem pe w condiţiei ca valoarea sa limită dinspre interior să fie egală cu $f_1(S)$

$$w_1 = f_1(S).$$

Din egalităţile (XV.7), avem

$$w_i = 2\pi\mu(S) + w_0 = 2\pi\mu(S) + \iint_S \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\, dS_1,$$

în care r este distanţa dintre două puncte S şi S_1 ale suprafeţei noastre. Obţinem, astfel, pentru $\mu(S)$ ecuaţia

$$\mu(S) = \frac{f_1(S)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\, dS_1. \qquad \text{(XVI.1)}$$

Dacă vom nota pentru prescurtare $\frac{1}{2\pi} f_1(S)$ cu $F_1(S)$, iar $\frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2}$ cu $K(S, S_1)$ (această din urmă expresie este evident funcţie de cele două puncte S şi S_1 de pe suprafaţă), ajungem la ecuaţia

$$\mu(S) = F_1(S) - \iint_S K(S, S_1)\mu(S_1)\, dS_1. \qquad \text{(XVI.2)}$$

Ecuaţiile integrale de acest tip se numesc ecuaţii integrale de *tip Fredholm de speţa a doua*. Vom trece curînd la studierea acestor ecuaţii.

Exact la fel, poate fi redusă la o ecuaţie Fredholm de speţa a doua şi problema lui Dirichlet pentru domeniul exterior mărginit de suprafaţa S, adică pentru domeniul infinit care admite ca frontieră pe S.

Într-adevăr, căutînd din nou soluţia sub forma unui potenţial de dublu strat, obţinem din condiţia $w_e = f_1(S)$, (analog cu problema precedentă) pentru densitatea necunoscută $\mu(S)$

$$w_e = -2\pi\mu(S) + w_0,$$

de unde

$$\mu(S) = -\frac{f_1(S)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\, dS;$$

notînd $-\frac{f_1(S)}{2\pi}$ cu $\Phi_1(S)$, obţinem

$$\mu(S) = \Phi_1(S) + \iint_S K(S, S_1)\mu(S_1)\, dS. \qquad \text{(XVI.3)}$$

Această ecuaţie este de acelaşi tip şi de aceeaşi speţă ca şi cea precedentă.

Tot la ecuaţii integrale se reduce şi problema lui Neumann pentru interiorul şi pentru exteriorul unei suprafeţe.

Vom căuta soluţia problemei interioare a lui Neumann sub forma potenţialului de simplu strat

$$u = v = \iint_S \frac{\nu(S_1)}{r}\, dS_1,$$

analog celor precedente:

$$\frac{\partial v}{\partial n_i} = -2\pi\nu(s) + \frac{\partial v}{\partial n_0} f_2(S),$$

de unde

$$\nu(S) = -\frac{f_2(S)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\nu(S_1)\cos\varphi_0}{r^2}\, dS_1 \qquad \text{(XVI.4)}$$

Unghiul ψ_0 se obține din unghiul φ prin schimbarea poziției punctului S cu cea a lui S_1. De aceea, punînd $-\frac{f_2(S)}{2\pi} = F_2(S)$, obținem pentru $\nu(S)$ ecuația

$$\nu(S) = F_2(S) + \iint_S K(S_1, S)\,\nu(S_1)\,dS_1. \qquad \text{(XVI.5)}$$

În sfîrșit, dacă vom căuta *soluția problemei exterioare a lui Neumann* sub forma potențialului de simplu strat v, vom avea

$$\frac{\partial v}{\partial n_0} = 2\pi\nu(S) + \iint_S \nu(S_1)\frac{\cos\psi_0}{r^2}\,dS_1 = f_2(S)$$

sau

$$\nu(S) = \frac{f_2(S)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\nu(S_1)\cos\psi_0\,dS_1}{r^2}.$$

Punînd

$$\frac{f_2(S)}{2\pi} = \Phi_2(S),$$

obținem pentru $\nu(S)$ ecuația

$$\nu(S) = \Phi_2(S) - \iint_S K(S_1, S)\,\nu(S_1)\,dS_1. \qquad \text{(XVI.6)}$$

Dacă vom reuși să găsim funcțiile μ și ν, satisfăcînd ecuațiile (XVI.2), (XVI.3), (XVI.5) sau (XVI.6), atunci problemele corespunzătoare ale fizicii matematice vor fi rezolvate,

LECȚIA XVII

ECUAȚIA LUI LAPLACE ȘI ECUAȚIA LUI POISSON ÎN PLAN

§ 1. Soluția fundamentală

Am studiat destul de amănunțit ecuațiile lui Laplace și Poisson în spațiu. În practică, se întîmplă adesea ca funcția u să nu depindă de una din variabile, de exemplu de z, atunci avem

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

În acest caz, ecuațiile se reduc la ecuații cu două variabile independente. Putem pune în planul XOY pentru ecuația

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

exact aceleași probleme, pe care le-am pus în cazul spațiului $\rho(x, y)$, putînd fi uneori și identic nul.

Să analizăm cîteva proprietăți ale unor asemenea probleme bidimensionale, care se deosebesc de cazul cu trei dimensiuni.

Exact la fel, ca și în spațiu, este ușor de demonstrat că o funcție armonică într-un anumit domeniu D al planului XOY își atinge valorile sale maxime și minime pe conturul acestui domeniu. De aici rezultă, în baza considerațiilor precedente, unicitatea soluției problemei lui Dirichlet pentru orice domeniu mărginit. Vom vedea însă mai departe că, spre deosebire de cazul precedent, problema Dirichlet pentru domeniul infinit nu are sens în formularea precedentă. Chestiunea determinării unei funcții armonice, nule la infinit, nu este posibilă în cazul de față, iar chestiunea unicității unei asemenea soluții este lipsită de conținut.

Analog lemelor demonstrate de noi în lecția IX, avem aici două alte leme.

L e m a 1. *Funcția* $\ln\frac{1}{r} = -\ln r$, *unde* $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ *este o funcție armonică de variabilele* x *și* y.

Într-adevăr,

$$-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(x-x_0)^2}{r^4},$$

$$-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(y-y_0)^2}{r^4},$$

de unde

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = 0.$$

L e m a 2. *Oricare ar fi funcția u continuă împreună cu derivatele sale de ordinul al doilea, are loc formula*

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D \ln \frac{1}{r}\,\Delta u\,dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_S \left(u\,\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} - \ln \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds, \qquad \text{(XVII.1)}$$

unde D este un domeniu oarecare, care conține în interiorul său punctul (x_0, y_0) *iar s este conturul acestui domeniu.* Am notat aici cu $\frac{\partial}{\partial n}$ derivata după direcția normalei interioare la conturul s.

Dacă punctul (x_0, y_0) se găsește în exteriorul domeniului D, ormula (XVII.1) se înlocuiește prin

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_D \ln \frac{1}{r}\,\Delta u\,dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_S \left(u\,\frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} - \ln \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0. \qquad \text{(XVII.2)}$$

Demonstrarea acestor formule nu prezintă dificultăți, întrucît coincide, cuvînt cu cuvînt, cu demonstrarea formulei analoge din spațiu făcută anterior. Nu vom face această demonstrație.

La fel, ca și înainte, se poate demonstra că, dacă funcția u admite originea coordonatelor ca punct singular, este armonică în vecinătatea originii și, în plus, satisface inegalitatea

$$|u| \leqslant \frac{A}{R^n},$$

în care $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, ea poate fi reprezentată sub forma

$$u = \sum_{m=0}^{n} \sum_{i+j=m} a_{ij}\,\frac{\partial^m \ln \frac{1}{R}}{\partial x^i\,\partial y^j} + u^*, \qquad \text{(XVII.3)}$$

în care u este o funcție armonică în întreg domeniul, inclusiv originea.

Sînt valabile teoremele

T e o r e m a 1. *Dacă* $u(R, \vartheta)$ *este o funcție armonică, atunci i* $v(R, \vartheta) = u\left(\frac{1}{R}, \vartheta\right)$ *este armonică.* (R și ϑ sînt aici coordonatele polare din plan).

T e o r e m a 2. *Dacă* $u(R, \vartheta)$ *este armonică pentru valori mari ale lui* R *și satisface inegalitatea*

$$|u| \leqslant AR^n,$$

ea poate fi reprezentată sub forma

$$u = \sum_{m=1}^{n} \sum_{i+j=m} a_{ij}\,R^{2m}\,\frac{\partial^m \ln \frac{1}{R}}{\partial x^i\,\partial y^j} + u^*,$$

unde u^* *este mărginit.*

§ 2. Probleme fundamentale

Problema determinării în întreg planul a soluției ecuației lui Poisson

$$\Delta u = \rho(x, y)$$

care se anulează la infinit, în cazul ecuațiilor cu două variabile, nu este în general, rezolvabilă așa că nu ne vom ocupa de ea.

Observăm că integrala $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho \ln \frac{1}{r}\,dx\,dy$, extinsă la întregul plan

(dacă ρ este diferit de zero numai într-un domeniu finit, domeniul va fi de fapt finit), este totuși o soluție particulară a ecuației lui Poisson, însă, în general vorbind, crescînd nemărginit la mari distanțe. Această integrală se numește *potențialul logaritmic al distribuției de mase.*

Problema lui Dirichlet pentru semiplan are sens. Fie funcția $f_1(x)$, care satisface inegalitatea

$$|f_1(x)| < \frac{A}{x^\alpha}, \quad \text{unde} \quad \alpha > 0.$$

Soluția ecuației

$$\Delta u = 0,$$

cu condiția

$$u|_{y=0} = f_1(x),$$

care se anulează la infinit, are forma

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} f_1(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\varphi}{r} f_1(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, d\omega(x, x_0, y_0),$$

în care φ este unghiul format de vectorul, dus din punctul $(x, 0)$ spre punctul (x_0, y_0), cu direcția normalei în punctul $(x, 0)$ la frontiera domeniului.

Cititorul va face ușor demonstrația singur.

Problema lui Neumann pentru semiplan nu numai că nu are soluții nule la infinit, dar nici nu admite măcar soluții mărginite. Nu ne vom ocupa de ea.

Dacă vom scrie formal potențialul de simplu strat

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\frac{1}{\pi} f_2(x)\, dx,$$

această integrală va crește nemărginit, cînd punctul (x_0, y_0) se îndepărtează la infinit.

Problema lui Dirichlet pentru cerc se rezolvă cu ajutorul unei metode analoge celei precedente.

Dacă punctul (x_1, y_1) este conjugat în raport cu punctul (x_0, y_0), cu alte cuvinte dacă

$$x_1 = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad y_1 = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2},$$

avem pe cercul de rază egală cu 1, ca și înainte, $r = R_0 r_1$, unde

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

iar R_0 este vectorul de poziție a punctului (x_0, y_0).

Fie (x_0, y_0) un punct interior al cercului $R \leqslant 1$. Aplicînd formula lui Green soluției ecuației $\Delta u = \rho$, vom avea

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{R\leqslant 1} \ln\frac{1}{r}\rho\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{R=1}\left(u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} - \ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds. \qquad \text{(XVII.4)}$$

Să aplicăm acum formula lui Green punînd în locul lui r valoarea $R_0 r_1$. Datorită faptului că (x_1, y_1) se găsește în exteriorul cercului, funcția $\ln\frac{1}{R_0 r_1}$ este armonică peste tot în interior și obținem

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{R\leqslant 1} \ln\frac{1}{R_0 r_1}\rho\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{R=1}\left(u\frac{\partial \ln\frac{1}{R_0 r_1}}{\partial n} - \ln\frac{1}{R_0 r_1}\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0. \qquad \text{(XVII.5)}$$

Scăzînd formula (XVII.5) din (XVII.4) și notînd

$$G(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_0 r_1} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},$$

obținem formula

$$u(x_0, y_0) = \iint\limits_{R\leq 1} \rho G(x, y, x_0, y_0)\, dx\, dy - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R=1} u \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad \text{(XVII.6)}$$

Funcția lui Green G este o funcție simetrică de punctele (x, y) și (x_0, y_0); ea este armonică în raport cu x_0 și y_0 și devine identic nulă în raport cu x, y, dacă (x_0, y_0) se găsește pe contur.

Dacă problema determinării soluției ecuației lui Poisson, care satisface condiția

$$u|_s = f_1(s), \quad \text{(XVII.7)}$$

admite o soluție, atunci această soluție trebuie să aibă formula (XVII.6).

În cazul particular cînd

$$u|_s = 0,$$

soluția problemei este dată de formula

$$u(x_0, y_0) = \iint\limits_{R\leq 1} \rho G\, dx\, dy. \quad \text{(XVII.8)}$$

Este ușor de verificat că funcția u, exprimată cu ajutorul formulei (XVII.8), este o soluție a problemei.

Într-adevăr,

$$\iint\limits_{R\leq 1} \rho G\, dx\, dy = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R\leq 1} \rho \ln \frac{1}{r}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R\leq 1} \rho \ln \frac{1}{R_0 r_1}\, dx\, dy.$$

Primul termen, fiind potențialul logaritmic al maselor distribuite satisface ecuația

$$\Delta v = \rho,$$

iar cel de-al doilea este o funcție armonică.

Prin urmare, formula (XVII.8) ne dă soluția ecuației lui Poisson. Se vede direct că această soluție satisface condiția $u|_s = 0$.

Să transformăm (XVII.6) introducînd în ea expresia explicită a funcției G. Trecînd în coordonate polare și înlocuind pe x, y, prin R și θ, iar pe x_0, y_0, prin R_0, θ_0, obținem pentru coordonatele punctului x_1, y_1 expresiile $\frac{1}{R_0}, \theta_0$.

Avem

$$\ln \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \ln [R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \theta_0)],$$

$$\ln \frac{1}{R_0 r_1} = -\frac{1}{2} \ln [R^2 R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \theta_0) + 1].$$

Funcția lui Green se scrie, atunci, sub forma

$$G = \frac{1}{4\pi} \{\ln [R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \theta_0)] - \ln [R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \theta_0) + 1]\}$$

iar

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{R=1} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-R + R_0 \cos(\theta - \theta_0)}{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \theta_0)} - \frac{-RR_0^2 + R_0 \cos(\theta - \theta_0)}{R^2 R_0^2 - 2RR_0 \cos(\theta - \theta_0) + 1} \right]_{R=1} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - R_0^2}{R_0^2 - 2R_0 \cos(\theta - \theta_0) + 1}.$$

Soluția problemei lui Dirichlet pentru cerc este dată de formula

$$u(R_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - R_0^2}{R_0^2 - 2R_0 \cos(\theta - \theta_0) + 1} f_1(\theta)\, d\theta.$$

Această formulă se numește *formula lui Poisson*.

Se verifică la fel, ca și pentru cazul din spațiu, că această formulă ne dă într-adevăr soluția problemei propuse.

În mod analog, se rezolvă problema lui Dirichlet și pentru exteriorul cercului.

Aceasta se formulează că problema determinării unei funcții u, armonică în exteriorul cercului $R = 1$, satisfăcînd condiția $u|_s = f_1(s)$ și mărginită la infinit. Această din urmă condiție deosebește în mod esențial problema lui Dirichlet pentru plan de problema lui Dirichlet din spațiu. Noi nu ne vom opri asupra rezolvării acestei probleme.

Formula, care ne dă soluția acestei probleme, va avea forma

$$u(R_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R_0^2 - 1}{R_0^2 - 2R_0 \cos(\theta - \theta_0) + 1} f_1(\theta)\, d\theta.$$

Din formula lui Poisson pentru funcțiile armonice din interiorul și exteriorul cercului rezultă, aproape fără nici o modificare în metoda de demonstrație, aceleași consecințe ca și la problema din spațiu.

§ 3. Potențialul logaritmic

Putem introduce noțiunea de potențial și pentru funcțiile de două variabile.

Integrala

$$v = \int_s \ln \frac{1}{r}\, \mu(s)\, ds$$

se numește *potențial logaritmic de simplu strat*. Acesta este o funcție armonică atît în interiorul cît și în exteriorul domeniului D mărginit de conturul s. Această funcție este continuă la traversarea conturului s iar derivata sa normală suferă un salt.

Integrala

$$\int_s \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n_0}\, \mu(s)\, ds,$$

în care derivatele sînt luate în raport cu variabilele x_0 și y_0, se dovedește a avea sens în cazul cînd punctul (x_0, y_0) se găsește pe frontieră. Notînd valoarea sa cu $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0$, obținem

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_e = \pi\mu + \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_i = -\pi\mu + \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0.$$

Valoarea $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0$ poate fi pusă sub forma

$$\int_s \mu \frac{\cos \psi_0}{r}\, ds,$$

unde ψ_0 este unghiul format de vectorul, dus din punctul (x, y) spre punctul (x_0, y_0), cu direcția normalei în acest din urmă punct. Funcția $\frac{\cos \psi_0}{r}$ este o funcție mărginită dacă curba este suficient de netedă, În general, potențialul logaritmic de simplu strat nu este mărginit la infinit. Integrala de formă

$$w = \int_s \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n}\, \mu(s)\, ds = \int_s \frac{\mu(s) \cos \varphi}{r}\, ds,$$

în care φ este unghiul între vectorul, dus din punctul (x, y) spre punctul (x_0, y_0) și direcția normalei în punctul (x, y), se numește *potențialul logaritmic de dublu strat*. Acest potențial este o funcție armonică atît în interiorul cît și în exteriorul domeniului D, mărginit de conturul s. Pe conturul s această funcție este discontinuă.

Dacă (x_0, y_0) se găsește pe conturul pe care îl presupunem suficient de neted, atunci $\frac{\cos \varphi}{r}$ este o funcție mărginită, iar integrala w are sens. Notînd valoarea sa cu w_0, vom avea

$$w_e = -\pi\mu + w_0,$$

$$w_i = \pi\mu + w_0.$$

Potențialul logaritmic de dublu strat este nul la infinit.

Analog cu cazul din spațiu, putem pune problemele lui Dirichlet și Neumann și pentru plan. Aici, însă, problemele exterioare vor avea anumite particularități.

La problema exterioară a lui Dirichlet, în locul condiției ca u să se anuleze la infinit, trebuie să impunem condiția ca această funcție să fie mărginită în vecinătatea punctului de la infinit.

Cu acestea, problema lui Dirichlet are o soluție unică bine determinată. Pentru problema lui Neumann trebuie să căutăm, ca mai înainte, o soluție nulă la infinit, însă spre deosebire de

cazul precedent, această problemă nu va avea în general, o soluție.

Condiția necesară și suficientă pentru ca să existe o asemenea soluție, va fi

$$\int_l f_2(s)\, ds = 0,$$

în care $f_2(s)$ este valoarea derivatei normale pe contur.

În acest sens, problemele plane, atît cea interioară cît și cea exterioară, seamănă mai mult una cu alta decît cele din spațiu. Pentru cititor va fi foarte util să demonstreze singur aceste afirmații.

Analog cu cele făcute anterior, putem reduce problemele lui Dirichlet și Neumann la ecuații integrale. Propunem cititorului să facă și acest lucru.

Pentru problema plană de integrare a ecuației lui Laplace, există încă o metodă deosebit de eficace, bazată pe utilizarea teoriei funcțiilor de variabilă complexă. Vom indica numai esența acestei metode fără a ne opri mai amănunțit asupra ei.

Să considerăm o funcție analitică oarecare $w(z) = u + iv$ de variabila complexă $z = x + iy$. Considerînd variabilele x și y independente și aplicînd lui w operatorul lui Laplace, obținem

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w''(z) + i^2 w''(z) = 0.$$

De aici rezultă că funcția $w(z)$ este o funcție armonică de variabilele x, y. Prin urmare, partea sa reală și cea imaginară, $u(x, y)$ și $v(x, y)$, vor fi fiecare funcții armonice în domeniul de analiticitate pentru $w(z)$.

Să introducem o nouă variabilă complexă independentă $\zeta = \xi + i\eta$, punînd

$$z = \psi(\zeta),$$

în care ψ este o funcție analitică oarecare. Atunci,

$$x = x(\xi, \eta),\ y = y(\xi, \eta).$$

În acest caz, funcția analitică $w(z)$ se transformă în funcția analitică de variabila ζ

$$w^*(\zeta) \equiv w(\psi, (\zeta)).$$

Prin urmare funcțiile

$$\left.\begin{aligned} u^*(\xi, \eta) &= u[x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta)], \\ v^*(\xi, \eta) &= v[x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta)], \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVII.9)}$$

vor fi din nou funcții armonice de variabilele ξ, η.

Așa cum se demonstrează în cursurile de teoria funcțiilor de variabilă complexă, formulele (XVII.9) realizează o transformare conformă a planului x, y, pe planul ξ, η, orice transformare conformă putînd fi obținută pe această cale. Din considerațiile noastre rezultă că o funcție armonică de variabilele x și y într-un anumit domeniu rămîne armonică, dacă supunem acest domeniu unei transformări conforme.

Pentru orice domeniu simplu conex Ω din planul x, y obținem următoarea metodă de rezolvare a problemei lui Dirichlet. Găsim transformarea conformă

$$x = x(\xi, \eta),\ y = y(\xi, \eta),$$

care transformă domeniul Ω într-un cerc. Se demonstrează în teoria funcțiilor de variabilă complexă că o asemenea reprezentare există. Funcția $u^*(\xi, \eta)$ trebuie să fie armonică în cerc și să ia pe frontieră valori date. O asemenea funcție poate fi construită cu ajutorul formulei lui Poisson. Revenind la variabilele x și y, obținem soluția problemei noastre.

LECȚIA XVIII

TEORIA ECUAȚIILOR INTEGRALE

§ 1. Observații generale

Am văzut în lecțiile precedente că rezolvarea unor probleme ale fizicii matematice ne conduce la rezolvarea ecuației

$$\varphi(P) = \int_D K(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1 + f(P), \quad \text{(XVIII.1)}$$

în care D este un anumit domeniu de variație al punctului P și al punctului P_1. Funcția $K(P, P_1)$ de două puncte variabile din acest domeniu se numește nucleu, iar $\varphi(P)$ este funcția necunoscută.

Domeniul D este considerat într-un spațiu cu n dimensiuni. Fie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ coordonatele punctului P în acest spațiu, iar $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ coordonatele punctului P_1, atunci, nucleul $K(P, P_1)$ este o funcție de $2n$ variabile $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n')$, iar funcțiile $\varphi(P)$ și $f(P)$ sînt funcții de n variabile $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, aceste variabile variind, astfel, încît punctele $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $P_1(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ să nu iasă din domeniul D.

În particular, dacă domeniul D este cu o singură dimensiune și conex, poziția punctului P este determinată numai de o singură coordonată x, iar ecuația integrală ia forma

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, x')\,\varphi(x')\,dx' + f(x).$$

Vom trece acum la studiul sistematic al ecuațiilor de forma (XVIII : 1), numite, de obicei, ecuații *integrale Fredholm de speța a 2-a.*

Vom considera funcțiile K și f reale. Vom introduce alte restricții ca, de exemplu, mărginirea, continuitatea și altele asemănătoare, pe măsură ce ele vor fi necesare.

Vom întîlni mai departe ecuații care pot avea, nu o singură soluție, ci mai multe. În cele ce urmează nu vom considera drept funcții diferite pe acelea care sînt echivalente, adică iau valori diferite numai pe o mulțime de măsură nulă.

La fel ca și pentru toate ecuațiile liniare, are loc pentru ecuațiile integrale de tip Fredholm.

T e o r e m a 1. *Soluția generală a ecuației* (XVIII.1) *are forma*

$$\varphi(P) = \varphi_0(P) + \varphi^*(P),$$

în care $\varphi_0(P)$ *este o soluție particulară oarecare a ecuației* (XVIII.1) *iar* $\varphi^*(P)$ *reprezintă soluția generală a eeuației*

$$\varphi(P) = \int_D K(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1. \quad \text{(XVIII.2)}$$

Vom numi ecuația (XVIII.2) *ecuația omogenă* corespunzătoare ecuației (XVIII.1).

De aici, este clar că dacă ecuația omogenă corespunzătoare nu are alte soluții în afara soluției banale $\varphi^*(P) = 0$, ecuația noastră nu poate avea mai mult decît o singură soluție.

§ 2. Metoda aproximațiilor succesive

Să studiem înainte de toate cîteva cazuri particulare foarte simple care ne permit să trecem la o tratare mai generală a chestiunii.

În locul ecuației (XVIII.1), vom considera ecuația de formă mai generală

$$\varphi(P) = \lambda \int_D K(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1 + f(P); \quad \text{(XVIII.3)}$$

așa-numita *ecuație cu parametru.* Să presupunem că domeniul D de variație al punctului P este mărginit; vom nota volumul acestui domeniu de asemenea cu litera D. Vom presupune în afară de aceasta că nucleul $K(P, P_1)$ reprezintă o funcție sumabilă de perechea de puncte (P, P_1) reprezentabilă în spațiul cu $2n$ dimensiuni, fiind valabilă inegalitatea

$$\int_D |K(P, P_1)|\,dP_1 \leqslant M,$$

în care constanta M nu depinde de poziția punctului P.

În aplicațiile de care ne vom ocupa, funcția $K(P, P_1)$ va avea numai un număr finit de varietăți de discontinuitate cu un număr de dimensiuni mai mic decît $2n$ (puncte, linii, suprafețe etc.). Dacă vom exclude aceste varietăți împreună cu un volum înconjurător arbitrar mic, funcția $K(P, P_1)$ va fi continuă în porțiunea rămasă a domeniului.

Să admitem că $f(P)$ este o funcție mărginită și măsurabilă

$$\sup |f(P)| = L < \infty$$

Această condiție va fi satisfăcută dacă, de exemplu, f este mărginită în D și continuă peste tot, în afară, poate, de un număr finit de varietăți cu un număr mai redus de dimensiuni. Vom considera funcția $\varphi(P)$ de asemenea mărginită și măsurabilă.

Pentru valori mici ale lui λ, apare în mod natural ideea de a căuta soluția ecuației (XVIII.3) sub forma seriei de puteri

$$\varphi(P) = \varphi_0(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(P). \qquad \text{(XVIII.4)}$$

Introducînd această expresie în (XVIII.3), obținem

$$\varphi_0(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(P) =$$

$$= \lambda \int_D K(P, P_1) \left[\varphi_0(P_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(P_1) \right] dP_1 + f(P),$$

de unde, comparînd coeficienții puterilor corespunzătoare din dreapta și din stînga, obținem

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(P) = f(P) \\ &\varphi_1(P) = \int_D K(P, P_1)\, \varphi_0(P_1)\, dP_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_k(P) = \int_D K(P, P_1)\, \varphi_{k-1}(P_1)\, dP_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII.5)}$$

Relațiile (XVIII.5) ne permit să calculăm, pas cu pas, toate funcțiile $\varphi_k(P)$. Într-adevăr, toate integralele din membrii drepți ai lui (XVIII.5) au sens, deoarece expresiile sub semnul integral reprezintă produsul unor funcții mărginite cu funcții sumabile. Evaluînd succesiv membrii drepți ai acestor ecuații vom avea

$$|\varphi_0(P)| \leqslant L; \quad |\varphi_1(P)| \leqslant \int_D |K(P, P_1)|\, L dP_1 \leqslant LM$$

și, în general,

$$|\varphi_k(P)| \leqslant LM^k,$$

Proprietatea funcțiilor $\varphi_k(P)$ de a fi măsurabile rezultă din teorema lui Lebesgue-Fubini.

Pentru prescurtare, convenim a nota funcția

$$\psi(P) = \int_D K(P, P_1) f(P_1), dP_1$$

cu simbolul Af.

Așa cum ne-am convins, este valabilă inegalitatea

$$|Af| \leqslant M \sup |f|.$$

Vom numi Af operatorul aplicat funcției f. Să luăm în considerare puterile operatorului A

$$A(Af) = A^2 f,\ A(A^2 f) = A^3 f, \ldots, A(A^{m-1} f) = A^m f.$$

Este valabilă următoarea formulă evidentă

$$A^{p+q} f = A^p (A^q f).$$

Formulele (XVIII.5) ia, cu aceste notații, forma

$$\varphi_k(P) = A^k f. \qquad \text{(XVIII.6)}$$

Așa cum am văzut, are loc aici evaluarea

$$|A^k f| \leqslant M^k \sup |f|, \qquad \text{(XVIII.7)}$$

Să semnalăm încă o proprietate importantă a operatorului A.

T e o r e m a 2. *Dacă un șir oarecare de funcții mărginite și măsurabile f_k converg uniform către funcția limită f_0, adică*

$$f_0 = \lim_{k \to \infty} f_k,$$

atunci

$$Af_0 = \lim_{k\to\infty} Af_k,$$

șirul Af_k *fiind de asemenea uniform convergent.*

Într-adevăr,

$$|Af_k - Af_0| = |A(f_k - f_0)| \leqslant M \sup |f_k - f_0|.$$

Consecință. Dacă seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(P) = u(P)$$

este uniform convergentă, atunci

$$Au(P) = \sum_{k=1}^{\infty} Au_k(P).$$

Cu noile noastre notații, ecuația (XVIII.3) ia forma

$$\varphi - \lambda A\varphi = f,$$

sau punînd încă $E\varphi \equiv \varphi$, unde E este operatorul identitate sau operatorul unitate, ecuația se scrie sub forma

$$(E - \lambda A)\varphi = f.$$

Introducînd în (XVIII.4) expresia lui φ_k din (XVIII.6) obținem, deocamdată încă formal, egalitatea

$$\varphi(P) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^k A^k f + \ldots \quad \text{(XVIII.8)}$$

Termenii seriei din membrul drept (XVIII.8), așa cum rezultă din evaluările (XVIII.7) vor fi pentru $|\lambda M| < 1$ mai mici în valoare absolută decît termenii seriei numerice convergente cu termeni pozitivi

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^k \sup |f| = \sup |f| \frac{1}{1 - |\lambda| M}.$$

Prin urmare, pentru un λ fixat și satisfăcînd condiția $|\lambda| < \frac{1}{M}$, seria din (XVIII.8) este uniform convergentă iar formula (XVIII.8) reprezintă, într-adevăr, o anumită funcție măsurabilă $\varphi(P)$.

Atunci,

$$|\varphi| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^k \sup |f| = \frac{\sup |f|}{1 - |\lambda| M}.$$

Să verificăm acum că funcția $\varphi(P)$ obținută de noi este o soluție a ecuației (XVIII.3). Introducînd expresia lui φ din (XVIII.8) în membrul stîng al ecuației (XVIII.3), obținem

$$(E - \lambda A)\left[f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f\right].$$

Dacă vom demonstra că această expresie este identic egală cu f, afirmația noastră va fi demonstrată. Seria care se găsește în parantezele mari este uniform convergentă. În baza teoremei 2, avem

$$(E - \lambda A)\left[f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f\right] =$$

$$= f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f - \lambda Af - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} A^{k+1} f = f. \quad \text{(XVIII.9)}$$

Am demonstrat astfel că funcția $\varphi(P)$ exprimată cu ajutorul formulei (XVIII.8) este o soluție a ecuației integrale (XVIII.3). Este ușor să demonstrăm unicitatea soluției mărginite cu condiția $|\lambda| M < 1$. Pentru aceasta, presupunînd ecuația integrală (XVIII.3) satisfăcută, vom aplica ambilor membrii ai acestei ecuații operatorul

$$E + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k,$$

înțelegîndu-l în sensul următor:

$$\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k\right) f \equiv f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k f.$$

Obținem

$$\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k\right)[(E - \lambda A)\varphi] = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k\right) f.$$

Desfăcînd parantezele din membrul stîng, obținem

$$\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k\right)[(E - \lambda A)\varphi] =$$

$$= \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k \varphi - \lambda A\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} A^{k+1} \varphi = \varphi. \quad \text{(XVIII.10)}$$

De aici,

$$\varphi = (E + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k) f.$$

Prin urmare, soluția trebuie să fie exprimată cu ajutorul formulei (XVIII.8) și este unică. Dacă introducem notația

$$B = E - \lambda A,$$

operatorul

$$E + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k$$

îl vom nota în mod natural cu simbolul B^{-1}. Egalitățile (XVIII.9) și (XVIII.10) iau acum forma

$$BB^{-1} f = f, \qquad \text{(XVIII.11)}$$

$$B^{-1} Bf = f. \qquad \text{(XVIII.12)}$$

Aceste formule justifică simbolismul nostru.

§ 3. Ecuația lui Volterra

În unele cazuri particulare, seria (XVIII.8) poate fi convergentă în întreg planul variabilei complexe λ. Să considerăm un exemplu. Să presupunem că domeniul D, cu o singură dimensiune, este reprezentat de semidreapta $x > 0$,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f(x),$$

și că nucleul $K(x, y)$ se bucură de proprietatea

$$K(x, y) \equiv 0 \text{ pentru } y > x,$$

fiind și mărginit

$$|K(x, y)| \leqslant M.$$

Atunci, ecuația ia forma

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{x} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f(x).$$

Ecuațiile de acest tip se numesc *ecuații Volterra*.

Presupunînd, ca mai înainte, că funcția f este măsurabilă și mărginită de constanta L, să evaluăm mărimea $A^k f$. Avem

$$|Af| = \left| \int_0^{x} K(x, y) f(y)\, dy \right| \leqslant \int_0^{x} LM\, dy = L \frac{Mx}{1},$$

$$|A^2 f| = \left| \int_0^{x} K(x, y)\, (Af)\, dy \right| \leqslant \int_0^{x} ML \frac{My}{1}\, dy = L \frac{M^2 x^2}{1 \cdot 2},$$

$$|A^3 f| = \left| \int_0^{x} K(x, y)\, (A^2 f)\, dy \right| \leqslant \int_0^{x} ML \frac{M^2 y^2}{1 \cdot 2}\, dy = L \frac{M^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

. . . . . .

$$|A^k f| \leqslant L \frac{M^k x^k}{k!}.$$

Prin urmare, toți termenii seriei (XVIII.8).

$$f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^k A^k f + \ldots$$

nu depășesc în mărime absolută termenii corespunzători ai seriei

$$L + L \frac{\lambda M x}{1!} + L \frac{\lambda^2 M^2 x^2}{2!} + \ldots + L \frac{\lambda^k M^k x^k}{k!} + \ldots$$

convergentă pe întreg planul λ. De aici, rezultă că seria (XVIII.8) este uniform convergentă în orice cerc finit și reprezintă o funcție analitică întreagă de λ.

§ 4. Ecuații cu nucleu degenerat

Să analizăm încă o clasă particulară de ecuații integrale a cărei teorie poate fi ușor construită. Rezultatele obținute aici rămîn valabile și într-un caz mai general.

Să studiem ecuația integrală (XVIII.3) în ipoteza că nucleul ei are forma specială

$$K(P, P_1) = \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(P)\, \psi_l(P_1). \qquad \text{(XVIII.13)}$$

Nucleele de formă (XVIII.13) se numesc *degenerate*.

În conformitate cu cele de mai sus, vom conveni să spunem că sistemul de funcții $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_N(P)$ este liniar independent dacă nu există n constante $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, nu toate nule, pentru care combinația liniară

$$\alpha_1 \varphi_1(P) + \alpha_2 \varphi_2(P) + \ldots + \alpha_N \varphi_N(P)$$

să fie egală cu zero. Sistemele de funcții $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_N(P)$, precum și $\psi_1(P), \psi_2(P), \ldots, \psi_N(P)$ poate fi considerate liniar independente în domeniul D, deoarece în caz contrar am putea exprima una sau mai multe funcții cu ajutorul unei combinații liniare a celorlalte și am ajunge la un nucleu de aceeași formă, însă cu un număr mai mic de termeni.

În cele ce urmează, atîta timp cît nu se va menționa contrariul vom considera funcțiile

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_N, \quad \psi_1, \ldots, \psi_N,$$

mărginite și avînd numai discontinuități izolate pe un număr finit de suprafețe netede.

Ecuația (XVIII.3) cu nucleu degenerat are forma

$$\varphi(P) = \lambda \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(P) \int_D \psi_l(P_1)\, \varphi(P_1)\, dP_1 + f(P), \quad \text{(XVIII.14)}$$

și, prin urmare, diferența $\varphi(P) - f(P)$ trebuie să fie o combinație liniară de funcțiile $\varphi_l(P), l = 1, 2, \ldots, N$ cu coeficienți constanți. Punînd $\varphi(P) - f(P) = \lambda \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(P)$ și introducînd această expresie în ecuația (XVIII.14), obținem

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(P) = \lambda \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(P) \int_D \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(P_1)\, \psi_l(P_1)\, dP_1 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \varphi_l(P) \int_D \psi_l(P_1) f(P_1)\, dP_1.$$

Intrucît funcțiile $\varphi_l(P)$ sînt liniar independente, coeficienții aceloraşi funcții trebuie să fie aceiași în ambii membri ai ecuației așa că obținem sistemul de ecuații

$$\alpha_l - \lambda \sum_{k=1}^{N} \alpha_k m_{kl} = f_l \quad (l = 1, 2, \ldots, N), \quad \text{(XVIII.15)}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} m_{kl} &= \int_D \varphi_k(P_1)\, \psi_l(P_1)\, dP_1, \\ f_l &= \int_D f(P_1)\, \psi_l(P_1)\, dP_1. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XVIII.16)}$$

Sistemul (XVIII.15) este echivalent cu ecuația integrală (XVIII.14). Să notăm matricea sistemului (XVIII.15) cu $M(\lambda)$

$$M(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 - m_{11}\lambda, & -m_{12}\lambda & \ldots & -m_{1N}\lambda \\ -m_{21}\lambda, & 1 - m_{22}\lambda & \ldots & -m_{2N}\lambda \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -m_{N1}\lambda, & -m_{N2}\lambda & \ldots & 1 - m_{NN}\lambda \end{Vmatrix}. \quad \text{(XVIII.17)}$$

Posibilitatea de rezolvare a sistemului nostru depinde de determinantul $\Delta(\lambda) = |M(\lambda)|$ al acestei matrice.

Este evident că aici se pot prezenta două cazuri

I. $\Delta(\lambda) \neq 0$,

II. $\Delta(\lambda) = 0$.

În cazul I avem următoarea teoremă

T e o r e m a 3. *Sistemul* (XVIII.15) *admite o soluție unică pentru aceste valori ale lui* λ *pentru care* $\Delta(\lambda) \neq 0$, *oricare ar fi* f_l, *iar ecuația* (XVIII.14) *este rezolvabilă, oricare ar fi funcția* f.

În particular, ecuația

$$\varphi(P) = \lambda \int_D K(P, P_1)\, \varphi(P_1)\, dP_1, \quad \text{(XVIII.18)}$$

pe care am denumit-o ecuația omogenă corespunzătoare ecuației (XVIII.3) are în acest caz o soluție unică, soluție banală. Teorema 3 nu necesită nici o demonstrație.

În cazul al II-lea, pentru valorile pentru care $\Delta(\lambda) = 0$, sistemul (XVIII.15) nu este rezolvabil pentru orice f_l, și prin urmare, ecuația (XVIII.3) nu este rezolvabilă pentru orice f.

În acest caz, sistemul omogen

$$\alpha_l - \lambda \sum_{k=1}^{N} m_{kl} \alpha_k = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, N) \quad \text{(XVIII.19)}$$

are $N - q$ soluții liniar independente, q fiind rangul matricii $M(\lambda)$.

Să presupunem că aceste soluții sînt

$$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \ldots, \alpha_N^{(s)} \quad (s = 1, 2, \ldots, N - q).$$

Ecuația (XVIII.18) va avea, evident, și ea, exact $N - q$ soluții liniar independente.

Se știe că, în cazul cînd determinantul sistemului este egal cu zero, sistemul neomogen poate să nu aibă nici o soluție. Vom aminti o anumită condiție necesară și suficientă pentru ca sistemul (XVIII.15) să admită o soluție.

În baza condiției $\Delta(\lambda) = 0$, membrii din stînga ai lui (XVIII.15) sînt dependenți și, prin urmare, putem alcătui combinații liniare ale acestor membri stîngi, identic nule. Într-adevăr, înmulțind ecuațiile (XVIII.15) respectiv cu β_l și adunîndu-le, obținem

$$\sum_{l=1}^{N} \alpha_l \beta_l - \lambda \sum_{l=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} m_{kl} \alpha_k \beta_l = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k - \lambda \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} m_{kl} \alpha_k \beta_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left[\beta_k - \lambda \sum_{l=1}^{N} m_{kl} \beta_l\right] = \sum_{l=1}^{N} f_l \beta_l.$$

Putem alege β_l, astfel încît

$$\beta_k - \lambda \sum_{l=1}^{N} m_{kl} \beta_l = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N). \qquad \text{(XVIII.20)}$$

Aceasta rezultă din faptul că determinantul sistemului (XVIII.20) este $\Delta(\lambda) = 0$. Așa cum se demonstrează în cursurile de algebră, numărul soluțiilor liniar independente ale sistemului (XVIII.20) este din nou $N-q$. Să presupunem că aceste soluții sînt $\beta_1^{(s)}, \beta_2^{(s)}, \ldots, \beta_N^{(s)}$; $s = 1, 2, \ldots, (N - q)$.

Pentru ca sistemul XVIII.15 să admită soluții, este necesar să fie îndeplinite egalitățile

$$\sum_{l=1}^{N} f_l \beta_l^{(s)} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, N - q). \qquad \text{(XVIII.21)}$$

În cursurile de algebră se demonstrează că aceste condiții sînt de asemenea și suficiente. Prin analogie cu faptul că sistemul sXVIII.15) corespundea ecuației (XVIII.3), iar sistemul (XVIII.19

corespundea ecuației (XVIII.18), se poate stabili o corespondență între sistemul (XVIII.20) și ecuația

$$\psi(P_1) = \lambda \int_D K(P, P_1)\, \psi(P)\, dP, \qquad \text{(XVIII.22)}$$

pe care o vom numi ecuație omogenă asociată ecuației (XVIII.18). Punînd în locul lui $K(P, P_1)$ expresia sa și repetînd cuvînt cu cuvînt raționamentele anterioare, ne convingem că soluția ecuației (XVIII.22) trebuie să aibă forma

$$\psi^{(s)} P_1 = \sum_{l=1}^{N} \beta_l^{(s)} \psi_l(P_1), \qquad \text{(XVIII.23)}$$

în care $\beta_l^{(s)}$ sînt niște numere care satisfac sistemul (XVIII.20) De aici, obținem

Teorema 4. *Ecuația omogenă* (XVIII.18) *și ecuația asociată ei* (XVIII.22) *au același număr de soluții liniar independente. Acest număr este* $r = N - q$, *unde* q *este rangul matricei* $M(\lambda)$ *iar* N *este numărul termenilor din nucleul nostru degenerat.*

Să subliniem că ecuațiile omogene (XVIII.18) și (XVIII.22) au soluții nebanale numai pentru acele valori ale lui λ, pentru care determinantul matricei $M(\lambda)$ se anulează. Aceste valori se numesc *valorile proprii sau valorile caracteristice* ale ecuației noastre, iar numărul de soluții liniar independente $r = N - q$, corespunzătoare numărului caracteristic dat, se numește *rangul său.*

Să înlocuim în ecuația (XVIII.21) pe f_l cu expresiile lor. Vom avea

$$\int_D f(P) \sum_{l=1}^{N} \beta_l^{(s)}\ \psi_l(P)\, dP = 0, \qquad \text{(XVIII.24)}$$

sau

$$\int_D f(P)\, \psi^{(s)}(P)\, dP = 0. \qquad \text{(XVIII.25)}$$

Este evident că (XVIII.21) și (XVIII.25) sînt echivalente.

Vom spune că două funcții sînt *ortogonale dacă integrala produsului lor, extinsă la domeniul D, este nulă.* Să demonstrăm următoarea teoremă.

Teorema 5. *Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația* (XVIII.14) *să admită o soluție, în cazul al doilea, adică pentru* $\Delta(\lambda) = 0$, *este ca termenul său liber să fie ortogonal cu toate soluțiile ecuației omogene asociate.*

Atunci, soluția generală a ecuației (XVIII.14) are evident forma

$$\varphi(P) = \varphi^{(0)}(P) + \sum_{s=1}^{N-q} C_s \varphi^{(s)}(P), \qquad \text{(XVIII.26)}$$

în care $\varphi^{(0)}(P)$ este o soluție particulară arbitrară, iar $\varphi^{(s)}P$; $s = 1, 2, \ldots, (N-q)$ sînt soluții particulare ale ecuației omogene (XVIII.18). Teoremele 3, 4 și 5 poartă denumirea *de prima, a doua, și a treia teoremă a lui Fredholm.*

Observație. Prima teoremă a lui Fredholm rezultă de fapt din cea de-a doua și din cea de-a treia teoremă. Într-adevăr, dacă numărul soluțiilor liniar independente ale ecuației asociate și ale ecuației omogene corespunzătoare este egal cu zero (la aceste ecuații soluțiile sînt totdeauna în același număr), atunci condițiile de ortogonalitate cad și ecuația neomogenă va avea o soluție unică.

Am considerat pînă acum ecuații cu nucleu degenerat, presupunînd că funcțiile $\varphi_l(P)$ și $\psi_l(P)$ nu conțin parametrul λ.

Să presupunem acum că funcțiile $\varphi_l(P)$ și $\psi_l(P)$ depind și de parametrul complex λ, fiind analitice într-un anumit domeniu Ω de variație al acestei variabile.

Atunci, determinantul $\Delta(\lambda)$ va fi de asemenea o funcție de λ, analitică în acest domeniu. Să presupunem că $\Delta(\lambda)$ nu se anulează identic. Atunci, în interiorul lui Ω, cel de-al doilea caz, adică $\Delta(\lambda) = 0$, poate avea loc numai în puncte izolate, deoarece $\Delta(\lambda)$ fiind funcție analitică, poate avea numai zerouri izolate.

Rezultatul obținut poate fi formulat sub forma unei teoreme.

Cea de-a 4-a teoremă a lui Fredholm. Dacă într-o ecuație cu nucleu degenerat, funcțiile din care este alcătuit acest nucleu sînt funcții analitice de parametrul λ într-un anumit domeniu Ω al planului λ, și, dacă, cel puțin pentru una din valorile lui λ, ecuația admite o soluție unică oricare ar fi membrul său drept, atunci cel de-al doilea caz, adică $\Delta(\lambda) = 0$, poate avea loc numai pentru puncte izolate ale domeniului.

§ 5. Nuclee de formă specială. Teoremele lui Fredholm pentru cazul general

După ce am examinat soluția ecuațiilor integrale în cercul $|\lambda| < \frac{1}{M}$, precum și soluția ecuațiilor cu nucleu degenerat, vom trece la analiza unui caz mai general. Să presupunem că nucleul ecuației (XVIII.3) are forma

$$K(P, P_1) = \sum_{l=1}^{N} \chi_l(P)\, \xi_l(P_1) + K_1(P, P_1) \qquad \text{(XVIII.27)}$$

unde

$$\int_D |K_1(P, P_1)|\, dP_1 \leqslant M, \qquad \text{(XVIII.28)}$$

$$\int_D |K_1(P, P_1)|\, dP \leqslant M. \qquad \text{(XVIII.29)}$$

Ecuația (XVIII.3) ia forma

$$\varphi(P) - \lambda \int_D K_1(P, P_1)\, \varphi(P_1)\, dP_1 =$$

$$= \lambda \sum_{l=1}^{N} \chi_l(P) \int_D \xi_l(P_1)\, \varphi(P_1)\, dP_1 + f(P). \qquad \text{(XVIII.30)}$$

Vom considera ecuația (XVIII.27) pentru valorile λ, care satisfac condiția $|\lambda| < \frac{1}{M}$. Să introducem din nou notațiile simbolice

$$\varphi(P) - \lambda \int_D K_1(P, P_1)\, \varphi(P_1)\, dP_1 \equiv (E - \lambda A)\, \varphi \equiv \beta_1 \varphi,$$

$$\chi(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^k \chi \equiv B_1^{-1} \chi.$$

Ne vom folosi de asemenea de notațiile corespunzătoare pentru ecuația asociată

$$\psi(P_1) - \lambda \int_D K_1(P, P_1)\, \psi(P)\, dP \equiv (E - \lambda A^*)\, \psi = B_1^* \psi.$$

Este ușor de verificat că, dacă punem

$$B_1^{*-1}\, \xi(P_1) \equiv \xi(P_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k A^{*k}\, \xi(P_1)$$

atunci, analog cu (XVIII.11) și (XVIII.12), obținem

$$B_1^* B_1^{*-1}\, \xi(P_1) \equiv \xi(P_1), \quad B_1^{*-1} B_1^*\, \xi(P_1) \equiv \xi(P_1).$$

Să verificăm încă două formule de care ne vom folosi în cele ce urmează

$$\int_D [B_1 \varphi(P)]\, \psi(P)\, dP = \int_D \varphi(P), [B_1^* \psi(P)]\, dP_1 \quad \text{(XVIII.31)}$$

$$\int_D [B_1^{-1} \chi(P)]\, \xi(P)\, dP = \int_D \chi(P)\, [B_1^{*-1} \xi(P)]\, dP. \quad \text{(XVIII.32)}$$

Într-adevăr,

$$\int_D \psi(P)\, [A\varphi(P)]\, dP = \int_D \psi(P) \left[\int_D K(P, P_1)\, \varphi(P_1)\, dP_1 \right] dP =$$

$$= \int_D \varphi(P_1) \left[\int_D K(P, P_1)\, \psi(P)\, dP \right] dP_1 = \int_D \varphi(P_1)\, [A^* \psi(P_1)]\, dP_1.$$

De aici, obținem direct

$$\int_D \psi(P)\, \{[E - \lambda A]\varphi\}\, dP = \int_D \varphi(P)\, \{[E - \lambda A^*]\, \psi\}\, dP.$$

La fel se demonstrează și formula (XVIII.32).

Ecuația XVIII.30 se scrie acum sub forma

$$B_1 \varphi = \lambda \sum \chi_l(P) \int_E \xi_l(P_1)\, \varphi(P_1)\, dP_1 + f(P). \quad \text{(XVIII.33)}$$

Să introducem o nouă funcție necunoscută punînd $B_1 \varphi(P) = \chi(P)$, unde $\varphi(P) = B_1^{-1} \chi(P)$. Introducînd această expresie în ecuația (XVIII.30) și folosindu-ne de egalitatea (XVIII,32), obținem

$$\chi(P) = \lambda \sum \chi_l(P) \int_D \xi_l(P_1)\, B_1^{-1} \chi(P_1)\, dP_1 + f(P) =$$

$$= \lambda \sum \chi_l(P) \int_D B_1^{*-1} \xi_l(P_1)\, \chi(P_1)\, dP_1 + f(P). \quad \text{(XVIII.34)}$$

Astfel, ecuația (XVIII.30) s-a transformat într-o ecuație cu nucleu degenerat pentru noua funcție necunoscută $\chi(P)$ cu același termen liber. Invers, dacă $\chi(P)$ este soluția ecuației (XVIII.34), atunci, $\varphi(P) = B_1^{-1} \chi(P)$ va fi soluția ecuției (XVIII.30). Pentru a ne convinge de acest lucru, este suficient să punem în (XVIII.34), în locul lui $\chi(P)$, expresia sa $\chi(P) = B_1 \varphi(P)$.

Vom arăta că, din teoremele lui Fredholm valabile conform celor demonstrate pentru noua ecuație integrală în raport cu $\chi(P)$, rezultă valabilitatea aceloraşi teoreme pentru ecuația inițială, dacă $|\lambda| < \frac{1}{M}$.

Să considerăm ecuația omogenă asociată ecuației (XVIII.34).

$$\psi(P_1) - \lambda \sum B_1^{*-1} \xi_l(P_1) \int_D \chi_l(P)\, \psi(P)\, dP = 0. \quad \text{(XVIII.35)}$$

Să notăm membrul stîng al acestei ecuații cu $\omega(P_1)$. Funcția $\omega(P_1)$ se anulează atunci, și numai atunci, cînd

$$B_1^* \omega(P_1) = 0. \quad \text{(XVIII.36)}$$

Aceasta înseamnă că ecuația (XVIII.35) are exact aceleași soluții ca și ecuația (XVIII.36). Însă,

$$B_1^* \omega_1(P_1) = B_1^* \psi(P_1) - \lambda \left(\sum \int_D \chi_l(P)\, \psi(P)\, dP \right) B_1^* B_1^{*-1} \xi_l(P_1) =$$

$$= B_1^* \psi(P_1) - \lambda \sum \xi_l(P_1) \int_D \chi_l(P)\, \psi(P)\, dP),$$

și, prin urmare, ecuația (XVIII.36) este ecuația omogenă asociată ecuației (XVIII.30). Astfel, ecuația omogenă asociată ecuației (XVIII.34) și ecuația omogenă asociată ecuației (XVIII.30) sînt echivalente.

Folosindu-ne de teoria dezvoltată, putem stabili toate teoremele lui Fredholm pentru ecuația inițială.

A doua teoremă a lui Fredholm. *Numărul de soluții liniar independente ale ecuației omogene corespunzătoare ecuației* (XVIII.30) *și ale asociatei sale* (XVIII.36) *este același.*

Este suficient să stabilim că numărul de soluții liniar independente este același pentru ecuațiile omogene corespunzătoare ecuațiilor (XVIII.34) și (XVIII.36) care sînt echivalente cu cele considerate. Însă, numărul acestor soluții ale ecuațiilor omogene corespunzătoare lui (XVIII.34) și (XVIII.35) este același în baza celei de-a doua teoreme a lui Fredholm, demonstrată pentru ecuația cu nucleu degenerat. Teorema este demonstrată.

A 3-a teoremă a lui Fredholm. *Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația* (XVIII.30) *să fie rezolvabilă, constă în aceea că termenul său liber să fie ortogonal cu toate soluțiile ecuației omogene asociate* (XVIII.36)

$$\int_D f(P)\,\psi_i(P)\,dP = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q). \qquad \text{(XVIII.37)}$$

Observăm că soluțiile $\psi_i(P)$ ale ecuației (XVIII.36) sînt soluțiile ecuației (XVIII.35) și că termenul liber din (XVIII.30) și (XVIII.34) este același.

De aceea, condițiile (XVIII.37) exprimă, așa cum rezultă din cea de-a 3-a teoremă a lui Fredholm stabilită pentru ecuații cu nucleu degenerat, condițiile necesare și suficiente ca (XVIII.34) să fie rezolvabil.

Datorită faptului că ecuațiile (XVIII.34) și (XVIII.30) sînt rezolvabile în același timp, condițiile (XVIII.37) vor fi condiții necesare și suficiente pentru ca (XVIII.30) să fie rezolvabilă. Teorema este demonstrată.

Prima teoremă a lui Fredholm. *Dacă ecuația* (XVIII.30) *este rezolvabilă pentru oricare ar fi funcția $f(P)$ din membrul drept, soluția sa este unică și, deci, ecuația omogenă corespunzătoare admite numai soluția banală. Reciproc, dacă ecuația omogenă admite numai soluția banală, atunci, ecuația este rezolvabilă, oricare ar fi funcția $f(P)$.*

Această teoremă, așa cum am observat mai sus, este o consecință a celei de-a doua și a celei de-a treia teoreme a lui Fredholm.

În cazul nostru, cea de-a 4-a teoremă a lui Fredholm are o formulare deosebit de simplă.

A 4-a teoremă a lui Fredholm. *Valorile proprii* λ *nu au puncte limită în interiorul cercului* $|\lambda| < \frac{1}{M}$.

Demonstrația rezultă din faptul că $\lambda=0$ nu va fi o valoare proprie pentru (XVIII.30), deoarece, pentru această valoare a lui λ, nu avem alte soluții înafară de $\chi(P) = f(P)$.

În baza celei de-a 4-a teoreme a lui Fredholm pentru nuclee degenerate, valorile proprii ale ecuației (XVIII.34) și, prin urmare, și ale ecuației (XVIII.30) nu pot avea puncte limită în interiorul cercului $|\lambda| < \frac{1}{M}$, în care funcțiile din care este alcătuit nucleul sînt regulate. Teorema este demonstrată.

Am demonstrat cele patru teoreme ale lui Fredholm pentru ecuațiile integrale al căror nucleu se poate pune sub forma (XVIII.27). În aplicații, se întîlnește adesea un tip de nuclee care pot fi aproximate cu ajutorul unor sume de forma

$$\sum_{l=1}^{N} \chi_l(P)\,\xi_l(P_1)$$

cu orice grad de precizie, în sensul că numărul M, care este egal cu marginea superioară a integralelor

$$\int_D |K(P, P_1)|\,dP_1, \quad \int_D |K(P, P_1)\,dP,$$

poate fi arbitrar de mic.

Pentru nuclee de acest tip, sînt valabile toate teoremele lui Fredholm într-un cerc cu raza oricît de mare, iar singurul punct limită pentru valorile proprii λ poate fi ∞.

Să demonstrăm că acest tip se obține, de exemplu, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții, care se întîlnesc foarte des în aplicații.

1. Domeniul D este o varietate n — dimensională cuprinsă într-un cub cu k dimensiuni Ω_1: $0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \ldots$ $\ldots, 0 \leqslant x_k \leqslant 1$ (sau poate fi reprezentat biunivoc și bicontinuu pe o asemenea varietate).

2. Nucleul $K(P, P_1)$ este o funcție continuă pe o varietate cu $2n$ dimensiuni și poate fi prelungit continuu în cubul cu $2k$ dimensiuni Ω_2.

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$
$$0 \leqslant y_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

unde am notat cu x_i coordonatele punctului P în cubul Ω_1, iar cu y_i coordonatele punctului Q în același cub.

Este evident că ambele condiții vor fi îndeplinite dacă, de exemplu, domeniul D este o suprafață în spațiul cu trei dimensiuni, iar funcția $K(P, P_1)$ este continuă atunci, cînd P și P_1 variază pe această suprafață.

Să trecem la demonstrarea afirmației noastre.

Conform cunoscutei teoreme a lui Weierstrass asupra aproximării funcțiilor continue prin polinoame, funcția $K(P, P_1)$ continuă în cubul închis cu $2k$ dimensiuni, poate fi totdeauna aproximată cu ajutorul polinoamelor de $2k$ variabile cu orice precizie dată dinainte. Însă, un polinom de x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ și y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, poate fi reprezentat totdeauna sub forma unei sume de produse de funcții, care depind numai de $x_1 \ldots$, $\ldots, x_k$ prin funcții care depind numai de $y_1 \ldots, y_k$ ceea ce trebuia demonstrat.

Chiar din modul în care a fost construită soluția ecuației lui Fredholm este evident că, în cazul nostru, această soluție va fi o funcție analitică de parametrul λ în întreg planul, cu excepția punctelor singulare, care sînt valorile proprii λ și care sînt izolate.

§ 6. Generalizarea rezultatelor

Pentru a obține rezultatele expuse în § 5 al acestei lecții nu este necesar să cerem ca nucleul $k_1(P, P_1)$ să satisfacă ambelor condiții (XVIII.28) și (XVIII.29). Este suficient să admitem că este îndeplinită numai una din ele, de exemplu, prima. Vom presupune că este îndeplinită condiția (XVIII.28) și nu vom face nici un fel de ipoteze relative la integrala

$$\int_D |K_1(P, P_1)|\, dP.$$

Să punem

$$\chi(P_1) = A^* \psi \equiv \int_D K_1(P, P_1)\, \psi(P)\, dP.$$

Vom demonstra următoarea proprietate fundamentală a operatorului A^*: dacă funcția $\psi(P)$ este sumabilă, atunci și funcția $\chi(P_1)$ este sumabilă și avem

$$\int_D |\chi(P_1)|\, dP_1 \leqslant M \int_D |\psi(P)|\, dP. \qquad \text{(XVIII.38)}$$

Pentru demonstrație, vom considera funcția de $2n$ variabile

$$K_1(P, P_1)\, \psi(P).$$

Această funcție este măsurabilă ca fiind produsul a două funcții măsurabile. În afară de aceasta, ea este sumabilă ca funcție de $2n$ variabile. Într-adevăr, este valabilă inegalitatea evidentă

$$\int_D |\psi(P)| \left\{ \int_D |K_1(P, P_1)|\, dP_1 \right\} dP \leqslant M \int_D |\psi(P)|\, dP.$$

Integrala iterată din membrul stîng există, evident. În baza completării la teorema lui Fubini (lecția VI, § 7), integrala dublă

$$\int_D \int_D |\psi(P)\, K(P, P_1)|\, dP\, dP_1$$

există și, prin urmare, există de asemenea și integrala dublă

$$\int_D \int_D \psi(P)\, K_1(P, P_1)\, dP\, dP_1,$$

aici, fiind posibilă schimbarea ordinei de integrare. Aceasta înseamnă că au sens ambii membri ai inegalității

$$\int_D \left| \left\{ \int_D K_1(P, P_1)\, \psi(P)\, dP \right\} \right| dP_1 \leqslant \int_D \left\{ \int_D |K_1(P, P_1)\, \psi(P)|\, dP \right\} dP_1,$$

și inegalitatea este valabilă. Însă,

$$\int_D \left\{ \int_D |K_1(P, P_1)\, \psi(P)|\, dP \right\} dP_1 = \int_D |\psi(P)| \left\{ \int_D |K_1(P, P_1)|\, dP_1 \right\} dP,$$

care împreună cu (XVIII.28) ne dă direct pe (XVIII.38).

Teorema 6. *Dacă șirul ψ_k converge în medie către funcția ψ_0, cu alte cuvinte dacă integrala*

$$\int_D |\psi_0 - \psi_k|\, dP,$$

tinde către zero, atunci șirul $A^*\psi_k$ converge în medie către $A^*\psi_0$

Într-adevăr,

$$\int_D |A^*\psi_0 - A^*\psi_k|\, dP = \int_D |A^*(\psi_0 - \psi_k)|\, dP \leqslant M \int_D |\psi_0 - \psi_k|\, dP,$$

de unde rezultă afirmația noastră.

În particular, dacă seria $v = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge în medie, atunci,

$$A^*v = \sum_{k=1}^{\infty} A^* u_k,$$

unde seria din dreapta converge în medie.

Să considerăm ecuația integrală

$$B^*\psi \equiv (E - \lambda A^*)\psi = \chi, \qquad \text{(XVIII.39)}$$

asociată ecuației (XVIII.3). Analog cu modul în care a fost găsită soluția ecuației XXVIII.3), putem obține și soluția acestei ecuații sub forma seriei

$$\psi \equiv B^{*-1}\chi = \chi + \lambda A^*\chi + \lambda^2 A^{*2}\chi + \ldots + \lambda^k A^{*k}\chi + \ldots \qquad \text{(XVIII.40)}$$

Să demonstrăm că formula (XVIII.40) ne dă, într-adevăr, soluția ecuației (XVIII.39) în cercul

$$|\lambda| < \frac{1}{M}.$$

Să stabilim, înainte de toate, convergența seriei din membrul drept al lui (XVIII.40). Aplicînd succesiv inegalitatea (XVIII.38), obținem

$$\int_D |A^*\chi|\, dP \leqslant M \int_D |\chi\, dP \cdot \int_D |A^{*2}\chi|\, dP \leqslant M^2 \int_D |\chi|\, dP, \ldots,$$

$$\int_D |A^{*k}\chi|\, dP \leqslant M^k \int_D |\chi|\, dP, \ldots$$

Din evaluările obținute, rezultă direct inegalitatea

$$\int_D \left| \sum_{k=m}^{m+p} \lambda^k A^{*k}\chi \right| dP \leqslant \int_D \left\{ \sum_{k=m}^{m+p} \left| \lambda^k A^{*k}\chi \right| \right\} dP =$$

$$= \sum_{k=m}^{m+p} |\lambda|^k \int_D |A^{*k}\chi|\, dP \leqslant \left(\sum_{k=m}^{m+p} |\lambda|^k M^k \right) \int_D |\chi|\, dP.$$

În cercul $|\lambda| < \frac{1}{M}$ avem

$$\int_D \left| \sum_{k=m}^{m+p} \lambda^k A^{*k}\chi \right| dP \leqslant \frac{|\lambda|^m M^m}{1 - |\lambda| M} \int_D |\chi| dP.$$

Pentru un m suficient de mare, membrul drept al inegalității va fi mai mic decît orice număr dat dinainte. Prin urmare, în virtutea teoremei asupra convergenței în medie, (lecția VI, teorema 23), seria (XVIII. 40) converge în medie, iar suma ei notată cu simbolul $B^{*-1}\chi$, reprezintă o funcție sumabilă de punctul variabil P_1.

Să demonstrăm, acum, identitățile

$$B^* B^{*-1}\chi = \chi, \qquad \text{(XVIII.41)}$$

$$B^{*-1} B^* \psi = \psi. \qquad \text{(XVIII.42)}$$

Avem

$$B^{*-1}B\psi = (\psi - \lambda A^*\psi) + \lambda A^*(\psi - \lambda A^*\psi) +$$
$$+ \lambda^2 A^{*2}(\psi - \lambda A^*\psi) + \ldots + \lambda^k A^{*k}(\psi - \lambda A^*\psi) + \ldots = \psi.$$

Mai departe, folosim teorema 6 și convergența în medie a seriei

$$\chi + \lambda A^*\chi + \lambda^2 A^{*2}\chi + \ldots + \lambda^k A^{*k}\chi + \ldots,$$

obținem

$$(E - \lambda A^*)(\chi + \lambda A^*\chi + \lambda^2 A^{*2}\chi + \ldots + \lambda^k A^{*k}\chi + \ldots) = \chi,$$

de unde $B^* B^{*-1}\chi \equiv \chi$. Ultima identitate exprimă faptul că funcția $B^{*-1}\chi$ este o soluție a ecuației (XVIII.39). Identitatea (XVIII.42) arată că $B^{*-1}\chi$ este soluția unică a acesteia, deoa-

rece din ecuația (XVIII.39), aplicînd ambilor membri operatorul B^{*-1}, obținem $\psi = B^{*-1}\chi$.

Toate celelalte raționamente pentru ecuațiile, ale căror nuclee satisfac numai condiția (XVIII.28), coincid exact cu demonstrațiile din § 5.

§ 7. Ecuații cu nuclee nemărginite de o formă specială

Să considerăm nucleul $K(P, P_1)$ în care punctele P, P_1 aparțin domeniului mărginit D. Să notăm cu r distanța dintre punctele P și P_1. Să presupunem că nucleul $K(P, P_1)$ este continuu peste tot, în raport cu ansamblul punctelor variabile P, P_1 entru $r \neq 0$, iar pentru $r \to 0$, tinde către infinit, satisfăcînd n întregul domeniu D inegalitatea

$$|K(P, P_1)| < \frac{A}{r^\alpha},$$

în care $0 < \alpha < n$.

Să arătăm că, pentru nucleele de acest tip, sînt îndeplinite toate condițiile noastre și că nucleul $K(P, P_1)$ se poate reprezenta în acest caz sub forma (XVIII.27) cu constantă M din inegalitatea (XVIII.28) oricît de mică.

Să considerăm funcția

$$K^*(P, P_1) = \min\left[K(P, P_1), \frac{A}{\delta^\alpha}\right],$$

unde δ este un număr pozitiv dat.

Vom evalua integrala

$$\int_D |K(P, P_1) - K^*(P, P_1)|\, dP_1.$$

Diferența $K(P, P_1) - K^*(P, P_1)$ poate fi diferită de zero numai în domeniul $r < \delta$, deoarece în toate celelalte puncte $K(P, P_1) \leqslant \frac{A}{\delta^\alpha}$, ceea ce înseamnă că $K^*(P, P_1) = K(P, P_1)$. Funcția $K(P, P_1) - K^*(P, P_1)$ este nenegativă peste tot și satisface inegalitatea

$$0 \leqslant K(P, P_1) - K^*(P, P_1) \leqslant A\left(\frac{1}{r^\alpha} - \frac{1}{\delta^\alpha}\right).$$

pentru $r \leqslant \delta$.

De aici, obținem

$$\int_D |K(P', P_1) - K^*(P, P_1)|\, dP_1 = \int_D [K(P, P_1) - K^*(P, P_1)]\, dP_1 \leqslant$$

$$\leqslant A \int_{r \leq \delta} \frac{1}{r^\alpha}\, dP_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

dacă δ este suficient de mic pentru un număr ε pozitiv și arbitrar.

Funcția $K^*(P, P_1)$, (înfășurătoarea inferioară fiind minimă) dintre două funcții continue, este continuă pentru $r \neq 0$. În vecinătatea suprafeței $r = 0$, aceasta este constantă, fiind egală cu $\frac{A}{\delta^\alpha}$ și, prin urmare, este de asemenea continuă. Astfel, această funcție se poate scrie, în baza § 5, sub forma

$$K^*(P, P_1) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P)\, \psi_i(P_1) + K_2(P, P_1),$$

unde

$$\int_D |K_2(P, P_1)|\, dP_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

Prin urmare,

$$K(P, P_1) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P)\, \psi_i(P_1) + K_2(P, P_1) + [K(P, P_1) - K^*(P, P_1)].$$

Punînd

$$K_1(P, P_1) = K_2(P, P_1) + [K(P, P_1) - K^*(P, P_1)],$$

vom avea

$$\int_D |K_1(P, P_1)|\, dP_1 \leqslant \int_D |K_2(P, P_1)|\, dP_1 +$$

$$+ \int_D |K(P, P_1) - K^*(P, P_1)|\, dP_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Am arătat astfel că teoremele lui Fredholm sînt valabile pe întreg planul parametrului complex λ pentru nucleele de tipul considerat ca și pentru nucleele continue ceea ce trebuia demonstrat.

LECȚIA XIX

APLICAREA TEORIEI LUI FREDHOLM LA REZOLVAREA PROBLEMELOR LUI DIRICHLET ȘI NEUMANN

§ 1. Deducerea proprietăților ecuațiilor integrale

Teoria ecuațiilor lui Fredholm, dezvoltată de noi, ne permite să trecem la rezolvarea directă a problemelor lui Dirichlet și Neumann, care au fost reduse de noi anterior la problema determinării soluțiilor unor anumite ecuații integrale.

Vom începe cu cîteva propoziții ajutătoare.

Vom considera peste tot, în cele ce urmează, suprafețe S, netede în sensul lui Liapunov.

L e m a 1. *Să presupunem că suprafața S satisface condițiile din § 4 al lecției XV, că $\nu(S)$ este o funcție continuă și că potențialul de simplu strat*

$$v = \int_S \frac{\nu(S)\,dS}{r} \qquad \text{(XIX.1)}$$

admite o derivată normală exterioară $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_e$ pe S, identic nulă. Atunci, densitatea $\nu(S)$ este identic nulă.

D e m o n s t r a ț i e. Așa cum am arătat în § 4, lecția XV, în condițiile lemei, v are o derivată normală regulată. Modificînd întrucîtva demonstrația făcută mai sus referitoare la unicitatea soluției problemei exterioare a lui Neumann, ne putem convinge că teorema unicității rămîne valabilă.

Potențialul considerat este o funcție armonică în exteriorul suprafeței S, care se anulează la infinit, ca $\frac{1}{r}$.

Derivata sa normală dinspre exterior este nulă pe S. Prin urmare, potențialul acesta este identic nul peste tot în exteriorul lui S.

Potențialul de simplu strat este o funcție continuă în întreg spațiul. Prin urmare, valoarea sa limită dinspre interior este de asemenea zero.

Să aplicăm acum teorema unicității pentru problema interioară a lui Dirichlet. Potențialul considerat este o funcție armonică în interiorul lui S. Valoarea sa limită pe suprafață este zero. Prin urmare, ea este identic nulă.

Cu acestea, valoarea limită a derivatelor sale normale dinspre interior este de asemenea nulă.

Folosindu-ne de faptul că

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_e - \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_i = 4\pi\nu(S), \qquad \text{(XIX.2)}$$

și observînd că derivata normală v are drept limită pe zero, atît dinspre interior cît și dinspre exterior, vedem că densitatea este nulă, ceea ce trebuia demonstrat.

Dacă valoarea limită $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_i$ pe S este nulă, atunci, în baza teoremei de unicitate pentru problema lui Neumann, funcția v este constantă în interiorul lui S.

L e m a 2. *Dacă în aceleași ipoteze pentru $\nu(S)$ avem $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_i = 0$ și $v_i = 0$, densitatea este identic nulă.*

Demonstrația acestei leme coincide cu demonstrația celei precedente.

Potențialul v este o funcție continuă, deci $v_e = 0$. Din unicitatea soluției problemei exterioare a lui Dirichlet rezultă că v este identic nul și în exteriorul lui S. Atunci, însă, formula (XIX.2) ne dă

$$\nu(S) = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Aceste leme ne permit să trecem direct la studierea ecuațiilor integrale Fredholm pentru problemele lui Dirichlet și Neumann, deduse în lecția XVI.

Am obținut ecuațiile
pentru problema interioară a lui Dirichlet

$$\mu(S_0) + \int_S\int K(S_0, S)\mu(S)dS = \varphi(S_0); \qquad \text{(XIX.3)}$$

pentru problema exterioară a lui Neumann

$$\nu(S_0) + \int_S \int K(S, S_0)\, \nu(S) dS = \psi(S_0); \qquad \text{(XIX.4)}$$

pentru problema exterioară a lui Dirichlet

$$\mu(S_0) - \int_S \int K(S_0, S)\, \mu(S)\, dS = \varphi(S_0); \qquad \text{(XIX.5)}$$

pentru problema interioară a lui Neumann

$$\nu(S_0) - \int_S \int K(S, S_0)\, \nu(S)\, dS = \psi S. \qquad \text{(XIX.6)}$$

Nucleul $K(S_0, S)$ are forma

$$K(S_0, S) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(n, r)}{r^2}. \qquad \text{(XIX.7)}$$

În baza lui (XV.6), avem inegalitatea

$$|K(S_0, S)| \leqslant \frac{A}{r^{2-\delta}}$$

Prin urmare nucleul $K(S_0, S)$ face parte din categoria nucleelor nemărginite de tip special considerate în lecția XVIII, deoarece în cazul nostru, folosind notațiile lecției precedente (v. § 7, lecția XVIII), avem

$$n = 2, \quad \alpha = 2 - \delta < n.$$

Astfel, sînt verificate pentru aceste ecuații, toate teoremele lui Fredholm.

§ 2. Studiul ecuațiilor

T e o r e m a 1. *Ecuațiile* (XIX.3) *și* (XIX.4) *au totdeauna soluții unice.*

Să demonstrăm acest lucru. Să presupunem că ecuația integrală

$$\nu(S_0) + \int_S \int K(S, S_0)]\, \nu(S)\, dS = 0 \qquad \text{(XIX.8)}$$

admite soluția $\nu(S)$. Datorită faptului că operatorul integral cu nucleul $K(S, S_0)$ este complet continuu în sens tare, cel de-al doilea termen din (XIX.8) este continuu, prin urmare, este

continuu și primul termen [1]). Potențialul de simplu strat

$$v = \int_S \frac{\nu(S)}{r} dS$$

cu densitatea continuă $\nu(S)$, are, așa cum am văzut în § 4 lecția XV, o derivată normală regulată.

Valorile limită pentru derivata normală a acestui potențial se exprimă, așa cum am văzut, (teorema 2 din lecția XV) prin intermediul densității, cu ajutorul formulei

$$2\pi \left[\nu(S_0) + \int_S \int K(S, S_0)\, \nu(S)\, dS\right],$$

iar în baza ecuației (XIX.8), acestea sînt nule. Conform lemei 1 din paragraful precedent $\nu(S) \equiv 0$ și astfel, ecuația omogenă corespunzătoare lui (XIX.4) nu admite soluții nebanale.

Atunci, prima teoremă a lui Fredholm ne spune că ecuația asociată omogenă care coincide cu (XIX.3) pentru $\varphi = 0$, nu are nici ea soluții banale. Mai departe, din aceeași teoremă a lui Fredholm, rezultă existența unei soluții unice bine determinate pentru (XIX.3) și (XIX.4), oricare ar fi membrii din dreapta.

Astfel, putem obține soluția acestor ecuații și în același timp și soluția problemei interioare a lui Dirichlet și a problemei exterioare a lui Neumann.

Din cele demonstrate, rezultă, între altele, demonstrația celei de-a doua părți a teoremei lui Liapunov din lecția XV.

Trecînd la rezolvarea problemei exterioare a lui Dirichlet și a problemei interioare a lui Neumann vom demonstra următoarea teoremă

T e o r e m a 2. *Fiecare din ecuațiile*

$$\left.\begin{aligned} \mu(S_0) - \int_S \int K(S_0, S)\, \mu(S)\, dS = 0, \\ \nu(S_0) - \int_S \int K(S, S_0)\, \nu(S)\, dS = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIX.9)}$$

numai o singură funcție proprie [2]).

[1]) A se vedea definiția completei continuități în sens tare la § 1 Lecția 24. Notă R.E.T.

[2]) Se numește funcție proprie (fundamentală) o soluție nebanală a ecuației omogene corespunzătoare unei valori proprii. V. lecția XXIV (Nota R.E.T.).

Să observăm înainte de toate că ecuațiile (XIX.9) sînt asociate (adjuncte) și, prin urmare, numărul soluțiilor lor liniar independente este același.

Pentru prima din ecuațiile (XIX.9) avem drept funcție proprie, unitatea. Într-adevăr, potențialul de dublu strat

$$w = \int_S \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \mu(S) dS$$

ne dă pentru $\mu = 1$ mărimea unghiului solid, sub care se vede suprafața S și prin urmare valoarea sa dinspre exterior este nulă. Însă, membrul stîng al primei ecuații din (XIX.9) este chiar valoarea limită a potențialului de dublu strat dinspre exterior și de aceea $\mu = 1$ trebuie să anuleze acest membru stîng. Prin urmare, numărul funcțiilor proprii ale fiecăreia din ecuațiile (XIX.9) este cel puțin unu.

Să arătăm că fiecare din ecuațiile (XIX.9) nu poate avea două soluții liniar independente.

Repetînd exact raționamentul făcut la demonstrarea teoremei 1, ne convingem că toate soluțiile celei de-a doua ecuații din (XIX.9) satisfac condiția (XV.13).

Dacă ar exista două funcții proprii $\nu_1(S)$ și $\nu_2(S)$, atunci ambele potențiale $\nu_1(S)$ și $\nu_2(S)$,

$$v_1 = \int_S \int \frac{\nu_1(S)}{r} dS \quad \text{și} \quad v_2 = \int_S \int \frac{(\nu_2 S)}{r} dS$$

ar fi funcții armonice în interiorul domeniului mărginit de S și ar avea în acest domeniu primele lor derivate continue peste tot, inclusiv frontiera. Astfel, valorile limită $\frac{\partial v_1}{\partial n}\Big|_i$ și $\frac{\partial v_2}{\partial n}\Big|_i$ ar fi nule pentru ambele funcții; în baza teoremei de unicitate a soluției problemei lui Neumann, aceste două funcții ar fi niște constante. Înlocuind ν_i, $i = 1, 2$ cu $\alpha_i \nu_i$ unde α_i, $(i = 1, 2)$ sînt factori constanți, putem realiza ca ambele potențiale v_1 și v_2 să fie egale cu unitatea în interiorul domeniului. Să presupunem că am făcut acest lucru. Atunci, potențialul

$$v = v_1 - v_2 = \int_S \int \frac{1}{r} [\nu_1(S) - \nu_2(S)] dS.,$$

avînd densitatea $\nu_1(S) - \nu_2(S)$, va fi nul în interior.

Valoarea sa limită v_i va fi de asemenea nulă datorită continuității potențialului de simplu strat. Conform temei 2, densitatea $\nu_1(S) - \nu_2(S)$ trebuie să fie nulă, ceea ce demonstrează teorema noastră.

Am demonstrat existența funcției proprii $\nu_0(S)$ pentru cea de-a doua ecuație (XIX.9). Putem considera că mărimea potențialului $v_0 = \int_S \int \frac{\nu_0(S)}{r} dS$ din interiorul domeniului Ω, mărginit de suprafața S, este egală cu unitatea. Funcția $\nu_0(S)$ ne dă distribuția corespunzătoare a sarcinilor electrice pe suprafața unui conductor care umple domeniul Ω mărginit de suprafața S. Problema determinării potențialului unui conductor electrizat poartă denumirea de *problema lui Robin*, iar potențialul v_0 se numește *potențialul lui Robin*.

Problema interioară a lui Neumann a constat din determinarea unei funcții armonice, astfel încît

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_i = f_1(S), \qquad \text{(XIX.10)}$$

T e o r e m a 3. *Pentru existența soluției problemei interioare a lui Neumann, este necesar și suficient ca membrul drept din* (XIX.10), *adică funcția* $f_1(S)$, *să satisfacă condiția*

$$\int_S \int f_1(S) dS = 0. \qquad \text{(XIX.11)}$$

Necesitatea acestei condiții rezultă din aceea că, dacă aplicăm formula lui Green (V. 16) lui u și 1 (aceste două funcții sînt armonice) obținem

$$0 = \int_S \int \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_S \int f_1(S) dS.$$

Suficiența rezultă din faptul că unitatea este soluția unică a ecuației integrale (XIX.5), asociată lui (XIX.6). De aceea, dacă termenul liber $\psi(S)$ al ecuației (XIX.6) este ortogonal cu unitatea, atunci această ecuație este rezolvabilă conform teoremei lui Fredholm. Însă, $\psi(S)$ diferă de $f_1(S)$ numai printr-un factor și, prin urmare, condiția (XIX.11) este necesară și suficientă pentru rezolvarea ecuației (XIX.6) și, împreună cu ea, a problemei lui Neumann.

Să trecem acum la rezolvarea *problemei exterioare a lui Dirichlet.*

Aşa cum am văzut, ecuaţia integrală (XIX.5) poate să nu aibă soluţii, deoarece ecuaţia omogenă corespunzătoare are o soluţie nebanală. Ne-am fi putut aştepta la acest lucru chiar de la început. Funcţia armonică u căutată, care satisface condiţia

$$u|_e = f(S), \qquad \text{(XIX.12)}$$

este unică. Ea se va comporta la infinit, în general, ca $\frac{A}{r}$ (v. teorema 1, lecţia XII), ca, de exemplu, funcţia armonică $\frac{1}{r}$, care este egală cu unitatea pe sfera unitate.

Noi însă încercăm să reprezentăm funcţia sub forma unui potenţial de dublu strat care descreşte ca $\frac{A}{r^2}$. Se înţelege că o asemenea reprezentare nu este totdeauna posibilă. Să încercăm acum, în legătură cu acestea, să căutăm soluţia problemei exterioare a lui Dirichlet sub forma

$$u = \frac{\alpha}{r_0} + u_1,$$

unde α este o constantă nedeterminată, r_0 este distanţa punctului (x, y, z) pînă la originea sistemului de coordonate pe care o vom considera aleasă în interiorul lui S, iar u_1 este potenţialul de dublu strat

$$u_1 = \int_S \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \mu(S)\, dS.$$

Valorile lui u_1 de pe suprafaţa S vor fi

$$u_1\Big|_S = f(S) - \frac{\alpha}{r_0}\Big|_S$$

Ecuaţia (XIX.5) se transformă, atunci, în ecuaţia

$$\mu(S_0) - \int_S \int K(S_0, S)\, \mu(S)\, dS = \varphi(S_0) + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{r_0}\Big|_{S_0}. \qquad \text{(XIX.13)}$$

Să impunem acum condiţia ca termenul liber al acestei ecuaţii să fie ortogonal cu funcţia proprie $\nu_0(S)$ a celei de-a doua ecuaţii (XIX.9). Obţinem

$$\int_S \int \varphi(S_0)\nu_0(S_0)\, dS_0 + \frac{\alpha}{2\pi}\int_S \int \frac{\nu(S_0)}{r_0}\, dS_0 = 0.$$

Integrala din cel de-al doilea termen este egală cu unitatea, conform ipotezei, şi deducem

$$\alpha = -2\pi \int_S \int \varphi(S_0)\, \nu_0(S_0) dS_0.$$

Determinînd astfel constanta α, obţinem din (XIX.13) o ecuaţie rezolvabilă. Rezolvînd-o, vom avea în acelaşi timp soluţia problemei exterioare a lui Dirichlet.

Lecţia XX

FUNCŢIA LUI GREEN

§ 1. Operatori diferenţiali cu o singură variabilă independentă

În multe probleme ale fizicii matematice, pe care le-am întîlnit, funcţia necunoscută era determinată nu numai de ecuaţia diferenţială, ci şi de condiţiile la limită ale domeniului în care era definită acea funcţie. Majoritatea problemelor legate de rezolvarea ecuaţiilor de tip eliptic a fost de acest gen. Vom avea mai tîrziu ocazia să ne convingem de faptul că şi în problemele la limită, pentru ecuaţiile de alte tipuri, cunoaşterea metodelor de rezolvare a unor asemenea probleme, cu condiţiile pe frontiera domeniului, aduce un folos real. Pentru a cerceta mai amănunţit proprietăţile cele mai importante ale soluţiilor acestor probleme de limită, ne propunem să dăm sub formă explicită reprezentarea unora dintre ele.

Să începem cu cazul cel mai simplu. Vom căuta soluţia ecuaţiei ordinare de ordinul al doilea

$$Ly \equiv p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x) \qquad \text{(XX.1)}$$

în intervalul $0 \leqslant x \leqslant 1$, satisfăcînd unor condiţii la extremităţi $x = 0$ şi $x = 1$.

Vom presupune că funcţia $p(x)$ este continuă, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul al doilea şi nu se anulează în intervalul $0 \leqslant x \leqslant 1$. A doua condiţie o vom înlătura ulterior în cîteva exemple. Presupunem funcţia $q(x)$ continuă împreună cu derivata sa de ordinul întîi, iar funcţia $r(x)$ este continuă în acelaşi interval.

Cu toate că această problemă se referă din punct de vedere formal la teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, totuşi noi o vom analiza aici mai amănunţit. Trebuie să facem cîteva observaţii preliminare importante.

Să considerăm operatorul adjunct al operatorului Ly [v. § 2 (V)].

Acest operator adjunct va avea forma

$$Mz \equiv (p(x)z)'' - (q(x)z)' + r(x)z. \qquad \text{(XX.2)}$$

Operatorii M şi L sînt legaţi între ei prin relaţia

$$zLy - yMz = \frac{d}{dx}\left(pz\frac{dy}{dx} - y\frac{d(pz)}{dx} + qyz\right).$$

Formula lui Green, pe segmenul [0,1], pentru aceşti operatori, are forma

$$\{p_0 y'_0 z_0 - p_0 y_0 z'_0 + (q_0 - p'_0) y_0 z_0\} - \{p_1 y'_1 z'_1 - p_1 y_1 z'_1 + (q_1 - p'_1) y_1 z_1\} + \int_0^1 (zLy - yMz)\,dx = 0, \qquad \text{(XX.3)}$$

unde indicii 0 şi 1 arată că se consideră valorile funcţii, respectiv pentru $x = 0$ şi pentru $x = 1$, de exemplu

$$p_0 = p(0),\ y_0 = y(0)\ \ z'_1 = z'(1).$$

Dacă funcţiile y şi z sînt alese astfel, încît acoladele din formula (XX.3) să se anuleze, această formulă se simplifică şi obţinem

$$\int_0^1 (zLy - yMz)\,dx = 0. \qquad \text{(XX.4)}$$

Se poate întîmpla ca formula (XX.4) să fie adevărată pentru orice pereche de funcţii y şi z aparţinînd la două familii $\{y\}$ şi $\{z\}$. Două astfel de familii le vom numi în acest caz adjuncte una alteia.

Să considerăm cîteva exemple de familii de funcţii adjuncte pentru operatorul (XX.1).

Vom studia familia de funcţii y, care satisface la extremităţile intervalului una din condiţiile liniare

$$\text{I)}\ y_0 = 0, \qquad \text{(XX.5)}$$

$$\text{II)}\ p_0 y'_0 + \alpha y_0 = 0,$$

la extremitatea $x = 0$, și analog

$$\text{I)}\ y_1 = 0, \qquad \text{II)}\ p_1 y'_1 + \beta y_1 = 0, \tag{XX.6}$$

la extremitatea $x = 1$.

Să scriem prima acoladă din formula (XX.3) sub forma

$$-y_0\left[p_0 z'_0 + (p'_0 - q_0 + \alpha) z_0\right] + z_0\left[p_0 y'_0 + \alpha y_0\right],$$

unde α este o constantă arbitrară. În același mod, să scriem și cea de-a doua acoladă. Atunci formula (XX.3) se transcrie astfel,

$$-y_0[(pz)' + (\alpha - q)z]_{x=0} + z_0[py' + \alpha y]_{x=0} + \int_0^1 (zLy - yMz)\,dx + y_1[(pz)' + (\beta - q)z]_{x=1} - z_1[py' + \beta y]_{x=1} = 0, \tag{XX.7}$$

în care β este de asemenea o constantă.

Din această reprezentare rezultă cîteva consecințe simple.

Dacă familia $\{y\}$ satisface prima condiție la extremitatea $x = 0$, atunci pentru ca în punctul $x = 0$ să se anuleze numai termenul care nu se găsește sub semnul integral, putem lua drept familie $\{z\}$ orice familie de funcții care satisfac pentru $x = 0$ condiția

$$\text{I}^a)\ z_0 = 0.$$

Dacă familia $\{y\}$ satisface a doua condiție la extremitatea $x = 0$, este suficient să supunem familia $\{z\}$ condiției

$$\text{II}^a)\ p_0 z'_0 + (p'_0 - q_0 + \alpha) z_0 = 0.$$

Pentru familia $\{y\}$ care satisface ambele condiții, adică pentru care $y'_0 = y_0 = 0$, nu este nevoie să impunem funcțiilor $\{z\}$ nici un fel de condiții pentru $x = 0$. Reciproc, dacă nu impunem restricții familiei $\{y\}$, atunci trebuie să impunem funcțiilor $\{z\}$ condițiile $z_0 = z'_0 = 0$. Exact la fel, se poate analiza extremitatea $x = 1$, în care condițiile considerate de noi vor avea forma

$$\text{I)}\ y_1 = 0, \quad \text{II)}\ p_1 y'_1 + \beta y_1 = 0, \quad \text{I}^a)\ z_1 = 0, \quad \text{II}^a)\ p_1 z'_1 + (p'_1 - q_1 + \beta) z_1 = 0.$$

Condițiile I^a sau II^a impuse la ambele extremități ale intervalului, sînt suficiente pentru ca familia $\{z\}$ să fie conjugată familiei $\{y\}$, dacă pentru aceasta din urmă sînt îndeplinite condițiile I sau II. Aceste condiții vor fi și necesare dacă vom lua drept familie $\{y\}$ mulțimea tuturor funcțiilor care satisfac condițiile I sau II la ambele extremități ale intervalului și care au un număr suficient de derivate continue. În cele ce urmează vom defini familiile $\{y\}$ și $\{z\}$ chiar în acest mod.

Putem considera și un tip mai general de condiții pentru familia $\{y\}$. Aceste condiții de tip general pot lega valorile lui y și y' la ambele extremități. Nu ne vom ocupa de enumerarea sau clasificarea acestor condiții, ci vom indica numai metoda de a le obține.

Forma biliniară

$$\Phi(y_0, y'_0, y_1, y'_1 ; z_0, z'_0, z_1, z'_1) \equiv p_0 y'_0 z_0 - p_0 y_0 z'_0 + (q_0 - p'_0) y_0 z_0 - p_1 y'_1 z_1 + p_1 q_1 z'_1 - (q_1 - p'_1) y_1 z_1$$

a celor două grupuri de cîte patru variabile se anulează pentru valori arbitrare ale unuia din grupuri, dacă, și numai dacă, valorile tuturor variabilelor din cel de-al doilea grup sînt nule. Dacă între variabilele unui grup, de exemplu, y_0, y'_0, y_1, y'_1, există anumite relații liniare, atunci exprimînd unele din aceste variabile prin celelalte, transformăm această formă în altă formă liniară în raport cu y, care însă depinde de un număr mic de variabile. Condiția ca această formă să se anuleze se obține prin anularea coeficienților variabilelor rămase. Astfel, suma numărului de condiții impuse lui $\{y\}$ și lui $\{z\}$ este de patru.

Să considerăm, de exemplu, ecuația

$$Ly \equiv y'' + k^2 y = 0.$$

Avem aici $p = 1$, $q = 0$, $r = k^2$; fie

$$y_0 = y_1, \qquad y'_0 = y'_1$$

condițiile pe care le impunem familiei $\{y\}$.

Conform observației noastre, forma Φ se poate scrie astfel

$$\Phi \equiv y_0 (z'_0 - z'_1) + y'_0 (z_0 - z_1) = 0.$$

Prin urmare, condiţiile adjuncte vor fi

$$z_0 = z_1,$$
$$z_0' = z_1'.$$

§ 2. Operatori adjuncţi şi familii adjuncte

Noţiunile de familii adjuncte şi de condiţii adjuncte nu se referă numai la ecuaţiile ordinare de ordinul al doilea. Acestea pot fi transpuse uşor şi pentru cazul cînd operatorul L este un operator diferenţial liniar cu derivate parţiale de un ordin oarecare. Am definit mai sus operatorul M, adjunct al operatorului diferenţial dat L. Formula integrală, a cărei valabilitate a fost dedusă acolo pentru doi operatori adjuncţi unul altuia, o putem considera acum ca definiţie a operatorilor adjuncţi.

Definiţie. Vom zice *că operatorul Mv este adjunctul* operatorului Lu şi că două *familii de funcţii* $\{u\}$ şi $\{v\}$, definite în domeniul Ω *sînt adjuncte* în raport cu L şi M în acest domeniu dacă

$$\int_\Omega vLu\, d\Omega = \int_\Omega uMv\, d\Omega \qquad \text{(XX.8)}$$

oricare ar fi funcţiile u şi v din familiile corespunzătoare.

Condiţiile cu ajutorul cărora se definesc două familii conjugate în raport cu operatorii L şi M, poartă denumirea de condiţii *adjuncte*.

Definiţie. *Operatorul L se numeşte autoadjunct dacă operatorul său adjunct coincide cu el, adică dacă.*

$$Mu \equiv Lu.$$

În mod analog, *pentru orice operator autoadjunct o familie de funcţii care coincide cu familia sa adjunctă se numeşte familie autoadjunctă.*

Vom considera încă cîteva exemple simple.

Exemplul 1.

$$Ly = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y.$$

Alegem familia de funcţii $\{y\}$ pe segmentul $0 \leqslant x \leqslant 1$ astfel încît să avem

$$y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0. \qquad \text{(XX.9)}$$

Este uşor de văzut că operatorul adjunctului Ly va fi

$$Mz = (-1)^n \frac{d^n (p_0 z)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_1 z)}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n z.$$

Observînd că

$$\varphi \frac{d^m \psi}{dx^m} + (-1)^m \psi \frac{d^m \varphi}{dx^m} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\varphi \frac{d^{m-1}\psi}{dx^{m-1}} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^{m-2}\psi}{dx^{m-1}} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{d^{m-3}\psi}{dx^{m-3}} - \cdots \right],$$

este uşor să exprimăm sub formă finită integrala nedefinită

$$\int (zLy - yMz)\, dx.$$

Fără a o calcula pînă la sfîrşit, vedem că ea se exprimă ca o formă biliniară în raport cu derivatele

$$y, y', \ldots, y^{n-1}, z, z', \ldots, z^{n-1},$$

ai căror coeficienţi sînt funcţii de variabila x.

În baza condiţiilor (XX.9), valoarea acestei forme biliniare este nulă pentru $x = 0$. Pentru ca valoarea sa să fie nulă şi pentru $x = 1$, este suficient să punem

$$z_1 = z_1' = \ldots = z_1^{(n-1)} = 0. \qquad \text{(XX.10)}$$

(Această condiţie este şi necesară dacă nu ştim nimic relativ la valorile lui y şi ale derivatelor sale pentru $x = 1$).

Atunci, avem

$$\int_0^1 (zLy - yMz)\, dx = 0.$$

Astfel condiţiile (XX.10) sînt adjuncte cu (XX.9).

Exemplul 2. Să considerăm operatorul

$$Lu \equiv \Delta u \qquad \text{(XX.11)}$$

şi să presupunem că studiem în domeniul Ω al celor două variabile

x, y, mărginit de conturul s, familia de funcții $\{u\}$ care satisfac condiția

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right]_s=0, \qquad \text{(XX.12)}$$

în care $\frac{\partial u}{\partial n}$ este derivata pe normala interioară într-un punct al conturului, iar $\frac{\partial u}{\partial s}$ este derivata pe tangentă, corespunzătoare sensului pozitiv de parcurs de pe contur. Formula lui Green ne dă

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\,\Delta u)\,d\Omega=\int_s\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds=$$

$$=\int_s\left\{\left(v\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right)-u\frac{\partial v}{\partial n}-v\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right\}ds.$$

Integrînd prin părți termenul

$$\int_s \beta v\frac{\partial u}{\partial s}\,ds$$

și observînd că termenii din afara semnului integral se anulează, datorită periodicității pe contur a funcțiilor β, v și u, vom avea

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,d\Omega=\int_s v\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\right.$$

$$\left.+\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right]-u\left[\frac{\partial v}{\partial n}+\alpha v-\frac{\partial\beta v}{\partial s}\right]\Bigg\}ds.$$

Este natural să numim expresia

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}+\left(\alpha+\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)v-\beta\frac{\partial v}{\partial s}\right]_s$$

adjunctă lui (XX.12) *în raport cu operatorul* Δ.

Familiile adjuncte în raport cu operatorul Δ vor fi familia $\{u\}$, care satisface condiția

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right]_s=0,$$

și familia $\{v\}$, care satisface condiția

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n}+\left(\alpha-\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)v-\beta\frac{\partial v}{\partial s}\right]_s=0.$$

Pentru aceste două familii, obținem

$$\iint_\Omega v\,\Delta u\,d\Omega=\iint_\Omega u\,\Delta v\,d\Omega.$$

E x e m p l u l 3. Dacă familia $\{u\}$ este o familie de funcții care nu satisface nici un fel de condiții, atunci familia din domeniul Ω, adjunctă în raport cu operatorul lui Laplace, va satisface două condiții

$$v\Big|_s=0,\quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_s=0.$$

Aceasta rezultă din faptul că integrala

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,d\Omega$$

se anulează numai în condițiile indicate pentru o alegere arbitrară a funcției u; acestea constituie și condițiile de autoadjuncție.

Am lămurit suficient prin aceste exemple noțiunea de familii adjuncte și de operatori adjuncți. Să trecem acum la o cercetare mai amănunțită a problemei.

§ 3. Lema fundamentală a integralelor ecuațiilor adjuncte

Ne propunem următoarea problemă: să se găsească soluția ecuației (XX.1), care satisface condițiile

$$\left.\begin{aligned}[\alpha_0 py'+\beta_0 y]_{x=0}&=c_0,\\ [\alpha_1 py'+\beta_1 y]_{x=1}&=a_1,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XX.13)}$$

sau condițiile

$$\left.\begin{aligned}[\alpha_0 py'+\beta_0 y]_{x=0}&=0,\\ [\alpha_1 py'+\beta_1 y]_{x=1}&=0.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XX.13')}$$

Probleme de acest gen se întîlnesc, de exemplu, atunci cînd trebuie să găsim în poziția de echilibru forma unei coarde de densitate și tensiune variabile, la extremitățile căreia este dată o anumită relație între deplasare și componenta pe axa y a tensiunii coardei. Tensiunea variabilă poate depinde de împrejurarea că coarda nu este orizontală. În acest caz greutatea fiecărei porțiuni de coardă va influența asupra mărimii tensiunii în punctele coardei situate deasupra acestei porțiuni.

L e m a 1. Fie $Ly \equiv py'' + qy' + ry$ și $Mz \equiv (pz)'' - (qz)' + rz$ *doi operatori adjuncți avînd coeficienții* $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ *continui pe segmenul* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $p(x)$ *avînd două derivate continue, iar* $q(x)$ *o derivată continuă pe același segment.*

Se presupune, în afară de aceasta, că $p(X)$ *nu se anulează* nicăieri pe segmentul nostru. Atunci, dacă $y_1(x)$ satisface ecuația

$$Ly = 0 \tag{XX.14}$$

și condiția

$$[\alpha_0 py' + \beta_0 y]_{x=0} = 0, \tag{XX.15}$$

atunci, funcția

$$z_1(x) = \frac{y_1(x)}{p} e^{\int_c^x \frac{q}{p}\,dx} \tag{XX.16}$$

este soluția ecuației adjuncte

$$Mz = 0, \tag{XX.17}$$

și satisface condiția

$$[(\alpha_0 pz)' + (\beta_0 - \alpha_0 q)z]_{x=0} = 0, \tag{XX.18}$$

adjunctă condiției (XX.15) [1]).

Demonstrația acestei leme poate fi făcută printr-o verificare simplă. Avem

$$(pz_1)' = y_1' e^{\int_c^x \frac{q}{p}\,dx} + y_1 \frac{q}{p} e^{\int_c^x \frac{q}{p}\,dx},$$

[1]) Ecuația $Mz = 0$, în care M este adjunctul lui L se numește adjunctă ecuației $Ly = 0$. (Nota R.E.T.).

$$Mz_1 = [(pz_1)' - qz_1]' + rz_1 = e^{\int_c^x \frac{b}{p}\,dx} \frac{1}{p}[py_1'' + qy_1' + ry_1] = 0.$$

Astfel, funcția (XX.16) este într-adevăr soluția lui (XX.17). Să verificăm acum că este satisfăcută condiția (XX.18).

$$[(\alpha_0 pz_1)' + (\beta_0 - \alpha_0 q)z_1]_{x=0} =$$

$$= \left[\alpha_0 y_1' + \alpha_0 y_1 \frac{p}{q} + \left(\frac{\beta_0}{p} - \frac{\alpha_0 q}{p}\right) y_1 \right]_{x=0} e^{\int_c^x \frac{q}{p}\,dx} =$$

$$= \left[\frac{1}{p} (\alpha_0 py_1' + \beta_0 y_1) \right]_{x=0} e^{\int_c^x \frac{q}{p}\,dx} = 0.$$

Lema este demonstrată.

În mod analog, dacă y_2 este o soluție a ecuației (XX.14), care satisface condiția

$$[\alpha_1 py_2' + \beta_1 y_2]_{x=1} = 0, \tag{XX.19}$$

atunci,

$$z_2 = \frac{y_2}{p} e^{\int_c^x \frac{q}{p}\,dx} \tag{XX.20}$$

va fi o soluție a ecuației (XX.17), satisfăcînd condiția

$$[(\alpha_1 pz)' + (\beta_1 - \alpha_1 q)z]_{x=1} = 0. \tag{XX.21}$$

În cazul cînd y_1 și y_2 sînt liniar independenți, putem da formulelor (XX.16) și (XX.20) o altă formă. Folosind expresia cunoscută a determinantului lui Wronski (wronskian)

$$C[y_1 y_2' - y_2 y_1'] = e^{-\int_c^x \frac{q}{p}\,dx}, \tag{XX.22}$$

vom avea, alegînd în mod convenabil, factorul constant arbitrar,

$$z_1 = \frac{y_1}{p\,[y_1'y_2 - y_2'y_1]},$$

$$z_2 = \frac{y_2}{p\,[y_1'y_2 - y_2'y_1]}. \qquad \text{(XX.23)}$$

O b s e r v a ț i e. Este evident că lema noastră admite și o reciprocă care poate fi formulată astfel.

Dacă z_1 și z_2 sînt soluțiile ecuației $Mz = 0$ satisfăcînd respectiv condițiile (XX.18) și (XX.21), atunci

$$y_1 = \frac{z_1}{p} e^{\int_c^x \frac{2p'-q}{p}\,dx} = Cpz_1 e^{-\int_c^x \frac{q}{p}\,dx},$$

$$y_2 = \frac{z_2}{p} e^{\int_c^x \frac{2p'-q}{p}\,dx} = C\,pz_2 e^{-\int_c^x \frac{q}{p}\,dx},$$

în care C este o constantă arbitrară, sînt soluțiile ecuației $Ly = 0$ și î care satisfac respectiv condițiile (XX.15) și (XX.19).

Din formulele (XX.23), rezultă $\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln \frac{y_1}{y_2}\right)$, adică

$$\frac{z_1'}{z_1} - \frac{z_2'}{z_2} = \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2}$$

sau

$$\frac{z_1'z_2 - z_2'z_1}{z_1z_2} = \frac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_1y_2} = \frac{1}{py_1z_2} = \frac{1}{py_2z_1},$$

de unde, avem,

$$y_1 = \frac{z_1}{p\,(z_1'z_2 - z_2'z_1)},\quad y_2 = \frac{z_2}{p\,(z_1'z_2 - z_2'z_1)}. \qquad \text{(XX.23')}$$

Este util să semnalăm încă formulele

$$y_1z_2 = z_1y_2,$$

$$y_1'z_2 - y_2'z_1 = z_1'y_2 - y_1z_2' = \frac{1}{p},$$

care se verifică direct.

C o n s e c i n ț ă. *Dacă ecuația* (XX.14) *admite o soluție nebanală, care satisface condițiile* (XX.15) *și* (XX.19), *atunci ecuația* (XX.17) *admite o soluție nebanală, care satisface condițiile* (XX.18) *și* (XX.21) *și reciproc.*

Pentru cercetările ulterioare va fi important să distingem *două cazuri*:

1. Ecuația (XX.14) nu admite soluții nebanale care satisfac condițiile (XX.15) și (XX.19).

2. Ecuația (XX.14) admite o asemenea soluție.

Vom demonstra în cele ce urmează că în primul caz ecuația (XXI.1) admite totdeauna o soluție unică și bine determinată, care satisface condițiile (XX.13). În cel de-al doilea caz, aceasta nu va fi așa.

Vom numi determinarea soluției (XX.14), cu condițiile (XX.15) și (XX.19), problemă omogenă.

Să presupunem că y_1 este soluția problemei omogene. Nu este greu de văzut că o asemenea soluție este unică, cu aproximația unui factor constant. Într-adevăr, dacă y_1 și y_2 sînt două soluții liniar independente ale ecuației (XX.14), wronskianul lor nu este nul; prin urmare, rapoartele

$$\frac{y_1'}{y_1} \text{ și } \frac{y_2'}{y_2}$$

nu sînt cu siguranță egale între ele și de aceea nici y_2 și nici una din combinațiile liniare

$$C_1y_1 + C_2y_2,$$

în care $C_2 \neq 0$, nu satisfac condițiile la limită.

Conform consecinței din lema 1 (XX),

$$z_1 = \frac{y_1}{p} e^{\int_c^x \frac{q}{p}\,dx}$$

este soluția unică a problemei adjuncte. Să demonstrăm acum teorema pentru cel de-al doilea caz pe care îl studiem.

T e o r e m a 1. *Pentru ca ecuația* (XX.1) *să aibă o soluție care satisface condițiile* (XX.13), *este necesar ca*

$$a_0z_1\Big|_{x=0} + \int_0^1 f(x)z_1\,dx - a_1z_1\Big|_{x=1} = 0. \qquad \text{(XX.24)}$$

Să presupunem că $y_1(x)$ este o soluție nebanală a problemei omogene, adică satisface ecuația (XX.14) și condițiile (XX.15) și (XX.19), atunci, funcția $z_1(x)$, definită de formula (XX.16), va satisface ecuația adjunctă și condițiile la limită adjuncte (XX.18) și (XX.21).

Aplicînd formula (XX.7) funcției $y(x)$, care este soluția lui (XX.1) cu condițiile (XX.13) și funcției $z_1(x)$, obținem direct formula (XX.24).

§ 4. Funcția de influență

Să ne ocupăm în mod amănunțit de analizarea primului caz.

Fie x_0 un punct arbitrar al intervalului $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ și să presupunem că funcția z_ε satisface ecuația

$$Mz_\varepsilon = \begin{cases} 0 \text{ pentru } |x - x_0| > \varepsilon, \\ \dfrac{1}{2\varepsilon} \text{ pentru } |x - x_0| \leqslant \varepsilon; \end{cases}$$

atunci,

$$\int_0^1 y M z_\varepsilon \, dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0 + \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} y \, dx.$$

Trecînd în această formulă la limită, pentru $\varepsilon \to 0$ și folosind teorema mediei, vom avea

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 y M z_\varepsilon \, dx = y(x_0).$$

Dacă z_ε și y aparțin la două familii adjuncte, adică satisfac condițiile (XX.15), (XX.19), (XX.18) și (XX.21), formula (XX.8) ne dă

$$y(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 y M z_\varepsilon \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 z_\varepsilon L y \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 z_\varepsilon f(x) \, dx.$$

Pentru același z_ε și aceeași funcțiune y, satisfăcînd condițiile generale (XX.14), obținem din formula (XX.7)

$$y(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[z_\varepsilon(0) a_0 + \int_0^1 z_\varepsilon f(x) \, dx - z_\varepsilon(1) a_1 \right].$$

În cazul cînd funcția z_ε tinde (pentru $\varepsilon \to 0$) uniform către funcția limită

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_\varepsilon = G(x, x_0),$$

depinzînd, se înțelege, de parametrul x_0, atunci vom putea trece la limită în formulele care exprimă pe $y(x_0)$. Convenim să numim funcția $G(x, x_0)$ *funcția lui Green pentru operatorul L.*

Cu ajutorul funcției lui Green am putea reprezenta soluția ecuației (XX.1), satisfăcînd pe (XX.13), sub forma

$$y(x_0) = G(0, x_0) a_0 + \int_0^1 G(x, x_0) f(x) \, dx - G(1, x_0) a_1. \quad \text{(XX.25)}$$

Dacă $a_0 = a_1 = 0$, vom avea

$$y(x_0) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x) \, dx. \quad \text{(XX.26)}$$

Putem explica imediat, fără a calcula pe z_ε, cum trebuie să fie funcția lui Green și chiar o putem construi. Integrînd pe Mz_ε, în intervalul $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, în care $\delta > \varepsilon$, obținem

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} M z_\varepsilon \, dx = 1.$$

Pe de altă parte,

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} M z_\varepsilon \, dx = (p z_\varepsilon)' \Big|_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} - \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} [(q z_\varepsilon)' - r z_\varepsilon] \, dx,$$

de unde

$$1 = (p z_\varepsilon)' \Big|_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} - \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} [(q z_\varepsilon)' - r z_\varepsilon] \, dx.$$

Presupunînd că z_ε și z'_ε sînt uniform mărginite, vedem că, pentru un δ suficient de mic putem neglija integrala din membrul drept al ultimei formule și la limită și obținem

$$(p z_\varepsilon)' \Big|_{x_0 - 0}^{x_0 + 0} = 1.$$

Funcţia $p(x)$ este însă continuă împreună cu derivata sa şi de aceea, considerînd z_ε continuu, obţinem

$$(pz_\varepsilon)'\Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = p(x_0)\, z_\varepsilon'\Big|_{x_0-0}^{x_0+0},$$

de unde

$$z_\varepsilon'\Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = \frac{1}{p(x_0)}.$$

§ 5. Funcţia lui Green şi construirea ei

Consideraţiile introductive de care ne-am folosit nu ne dau, se înţelege, demonstraţia valabilităţii raţionamentelor noastre. Totuşi, pornind de la ultima formulă putem să le justificăm în mod riguros.

D e f i n i ţ i e. Numim funcţia lui Green pentru operatorul Ly şi pentru condiţiile la limită (XX.13), o funcţie $G(x, x_0)$, care satisface următoarele condiţii:

1. Ca funcţie de variabilă x, ea satisface, oricare ar fi x_0, condiţiile adjuncte condiţiilor impuse operatorului Ly, adică

$$p(0)G_x'(0,x_0) + (p'(0) - q(0) + \alpha)G(0, x_0) = 0,$$
$$p(1)G_x'(1, x_0) + (p'(1) - q(1) + \beta)G(0, x_0) = 0.$$

2. În intervalalele

$$0 \leqslant x < x_0,\ x_0 < x \leqslant 1$$

funcţia $G(x, x_0)$ este continuă împreună cu derivatele sale pînă la ordinul al doilea şi satisface ecuaţia adjunctă ecuaţiei $Ly = 0$, adică

$$Mz \equiv \frac{d^2(p(x)z)}{dx^2} - \frac{d(q(x)z)}{dx} + r(x)z = 0.$$

3. În punctul $x = x_0$ funcţia $G(x, x_0)$ ca funcţie de x, este continuă, iar derivata sa este discontinuă, avînd

$$G_x'(x_0 + 0,\ x_0) - G_x'(x_0 - 0, x_0) = \frac{1}{p(x_0)}. \qquad \text{(XX.27)}$$

Funcţia lui Green introdusă de noi poate fi construită efectiv, fără dificultăţi.

Fie z_1 o soluţie a ecuaţiei $Mz = 0$, care satisface condiţia (XX.18) iar z_2 o soluţie a aceleiaşi ecuaţii, satisfăcînd condiţia (XX.21). Aceste soluţii sînt independente, deoarece, în cazul contrar, ar exista o soluţie nebanală a ecuaţiei $Mz = 0$ şi, prin urmare şi a ecuaţiei $Ly = 0$ şi ne-am găsi în cel de-al doilea caz. Fiecare din ele este determinată numai cu aproximaţia unui factor constant arbitrar.

Este evident că

$$G(x, x_0) = a(x_0)z_1(x),\quad 0 \leqslant x < x_0;$$
$$G(x, x_0) = b(x_0)z_2(x),\quad x_0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Din faptul că $G(x, x_0)$ este o funcţie continuă, iar prima sa derivată are o discontinuitate pentru $x = x_0$, satisfăcînd lui (XX.27), obţinem

$$a(x_0)z_1(x_0) - b(x_0)\, z_2(x_0) = 0,$$
$$a(x_0)z_1'(x_0) - b(x_0)z_2'(x_0) = -\frac{1}{p(x_0)},$$

de unde

$$a(x_0) = \frac{-z_2(x_0)}{p(x_0)\,[z_2(x_0)\,z_1'(x_0) - z_2'(x_0)\,z_1(x_0)]},$$

$$b(x_0) = \frac{-z_1(x_0)}{p(x_0)\,[z_2(x_0)\,z_1'(x_0) - z_2'(x_0)\,z_1(x_0)]};$$

wronskianul, care se găseşte la numitor, nu este nul, deoarece $z_1(x)$ şi $z_2(x)$ sînt liniar independente.

Comparînd aceste expresii cu formulele (XX.23), vedem

$$a(x_0) = y_2(x_0);\ b(x_0) = y_1(x_0)$$

în care $y_1(x_0)$ şi $y_2(x_0)$ sînt anumite soluţii ale ecuaţiei $Ly = 0$, satisfăcînd respectiv condiţiile (XX.15) şi (XX.19).

Obţinem, astfel, următoarea reprezentare pentru funcţia lui Green

$$G(x, x_0) = \begin{cases} y_2(x_0)z_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ y_1(x_0)z_2(x), & x_0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \qquad \text{(XX.28)}$$

Formula (XX.28) nu ne dă numai funcția lui Green sub formă explicită, ci ne permite să studiem de asemenea și cîteva din proprietățile sale.

Proprietatea 1. Funcția lui Green este continuă în pătratul

$$0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1$$

Din planul $x\,O\,x_0$.

Proprietatea 2. Primele derivate ale funcției lui Green sînt continue peste tot, în afara diagonalei principale $x = x_0$, unde ele au o discontinuitate de prima speță, derivata după direcția diagonalei fiind continuă, iar derivatele în raport cu x și cu x_0 satisfăcînd condițiile

$$G'_x(x_0 + 0, x_0) - G'_x(x_0 - 0, x_0) = \frac{1}{p(x_0)},$$

$$G'_{x_0}(x_0, x_0 + 0) - G'_{x_0}(x_0, x_0 - 0) = \frac{1}{p(x_0)}.$$

Aceste relații se verifică direct.

Din formula (XX.28) rezultă

Teorema 2. *Funcția lui Green $G(x, x_0)$, ca funcție de argumentul x_0, servește drept funcție a lui Green pentru operatorul Mz, cu condițiile* (XX.18) *și* (XX.21); *deci, înlocuind problema prin adjuncta sa, argumentele funcției lui Green își schimbă numai locurile.*

Ne rămîne să verificăm că formulele (XX.25) sau (XX.26) ne dau într-adevăr soluția problemei propuse. Este suficient să verificăm aici formula (XX.26), întrucît problema determinării unei soluții pentru (XX.1) cu condițiile (XX.13) poate fi totdeauna redusă la problema cu condițiile omogene (XX.13′).

Dacă aceasta din urmă admite o soluție, atunci și problema inițială are o soluție. Am arătat că dacă soluția problemei există, aceasta poate fi reprezentată sub forma (XX.26).

Astfel, este suficient să stabilim că funcția

$$y(x_0) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x)\, dx \qquad \text{(XX.29)}$$

satisface ecuația (XX.1) și condițiile (XX.13′).

Să derivăm expresia, obținută în raport cu x_0. Avem

$$y(x_0) = \int_0^{x_0} G(x, x_0) f(x)\, dx + \int_{x_0}^1 G(x, x_0) f(x)\, dx,$$

$$y'(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{\partial G}{\partial x_0} f(x)\, dx + \int_{x_0}^1 \frac{\partial G}{\partial x_0} f(x) dx + G(x_0, x_0) f(x_0) - G(x_0, x_0) f(x_0),$$

$$y'(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{\partial G}{\partial x_0} f(x)\, dx + \int_{x_0}^1 \frac{\partial G}{\partial x_0} f(x)\, dx. \qquad \text{(XX.30)}$$

Mei departe,

$$y''(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} f(x)\, dx + \int_{x_0}^1 \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} f(x)\, dx +$$

$$+ f(x_0) \left.\frac{\partial G}{\partial x_0}\right|_{x_0 - 0} - f(x_0) \left.\frac{\partial G}{\partial x_0}\right|_{x_0 + 0} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} f(x)\, dx + f(x_0) \frac{1}{p(x_0)}. \qquad \text{(XX.31)}$$

Folosindu-ne de acestea, obținem

$$p(x_0) y''(x_0) + q(x_0) y'(x_0) + r(x_0) y(x_0) = f(x_0) +$$

$$+ \int_0^1 L_0 G(x, x_0) f(x)\, dx.$$

Însă $G(x, x_0)$, ca funcția de cel de-al doilea argument al său, satisface ecuația $L_0 G = 0$, de unde

$$p(x_0) y''(x_0) + q(x_0) y'(x_0) + r(x_0) y(x_0) = f(x_0),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Am studiat această problemă în primul caz. Am stabilit că atunci cînd există totdeauna o soluție bine determinată, a ecuației

(XX.1), care satisface, condițiile (XX.13) sau (XX.13′) și care se poate reprezenta sub forma (XX. 25) sau (XX.26), unde $G(x, x_0)$ este funcția lui Green determinată de noi.

§ 6. Funcția lui Green generalizată pentru ecuația liniară de ordinul al doilea

Să cercetăm mai amănunțit cel de-al doilea caz.

L e m a 2. *Dacă $y_0(x)$ și $z_0(x)$ sînt soluții ale ecuațiilor $Ly = 0$ și $Mz = 0$, satisfăcînd respectiv condițiilor omogene* (XX.15), (XX.19) *și* (XX. 18), (XX.21), *atunci*

$$\int_0^1 y_0(x)\, z_0(x)\, dx \neq 0. \qquad \text{(XX.32)}$$

Această observație rezultă din faptul că

$$\int_0^1 y_0(x)\, z_0(x)\, dx = c \int_0^1 \frac{y_0^2}{p}\, e^{\int_c^x \frac{q}{p}\, dx}\, dx.$$

Deoarece expresia de sub semnul integral își păstrează tot timpul același semn, integrala nu se poate anula.

L e m a 3. *Ecuația*

$$Mz = z_0$$

nu poate avea o soluție, care să satisfacă în același timp condițiile (XX.18) *și* (XX.21), *iar ecuația $Ly = y_0$ nu poate avea o soluție care să satisfacă în același timp condițiile* (XX.15) *și* (XX.19).

Într-adevăr, în caz contrar, aplicînd formula (XX.7) și introducînd acolo în locul lui y, soluția y_0, vom obține

$$\int_0^1 y_0\, Mz\, dz = \int_0^1 z_0 y_0\, dx = 0,$$

ceea ce contrazice lema 2. În mod identic se demonstrează și cea de a doua jumătate a afirmației.

D e f i n i ț i e. Să considerăm acum funcția $G_1(x, x_0)$ definită cu ajutorul condițiilor.

1. Ca funcție de x, funcția $G_1(x, x_0)$ satisface condițiilor

$$\left.\begin{aligned} p(0)\,\frac{\partial G_1(0, x_0)}{\partial x} + [p'(0) - q(0) + \alpha]\, G_1(0, x_0) = 0, \\ p(1)\,\frac{\partial G_1(1, x_0)}{\partial x} + [p'(1) - q(1) + \beta]\, G_1(1, x_0) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XX.33)}$$

oricare ar fi x_0.

2. În intervalele

$$0 \leqslant x < x_0, \quad x_0 < x \leqslant 1$$

funcția $G_1(x, x_0)$ este continuă împreună cu derivatele sale de ordinul al doilea satisfăcînd ecuația

$$MG_1(x_1, x_0) = a(x_0) z_0(x); \qquad \text{(XX.34)}$$

funcția $a(x_0)$ o vom determina mai tîrziu.

3. În punctul $x = x_0$ funcția $G_1(x, x_0)$, ca funcție de x, este continuă, iar derivatele sale sînt discontinue, avînd

$$\frac{\partial G_1(x_0 + 0, x_0)}{\partial x} - \frac{\partial G_1(x_0 - 0, x_0)}{\partial x} = \frac{1}{p(x_0)}. \qquad \text{(XX.35)}$$

4. $$\int_0^1 G_1(x, x_0)\, y_0(x)\, dx = 0. \qquad \text{(XX.36)}$$

Numim această funcție *funcția lui Green generalizată*. Condiția (XX. 35) ne permite să determinăm factorul $a(x_0)$.

Să trecem la construirea explicită a funcții G_1.

Să notăm cu $y^{(1)}$ și $y^{(2)}$ soluțiile particulare ale ecuației

$$Ly = y_0, \qquad \text{(XX.37)}$$

satisfăcînd condițiile

$$y^{(1)}|_{x=0} = y^{(1)\prime}|_{x=0} = 0,$$
$$y^{(2)}|_{x=1} = y^{(2)\prime}|_{x=1} = 0,$$

și analog, $z^{(1)}$ și $z^{(2)}$ soluțiile particulare ale ecuației

$$Mz = z_0, \qquad \text{(XX.38)}$$

satisfăcînd condițiile;

$$z^{(1)}|_{x=0} = z^{(1)\prime}|_{x=0} = 0,$$
$$z^{(2)}|_{x=1} = z^{(2)\prime}|_{x=1} = 0.$$

Este evident că diferența $y^{(2)} - y^{(1)} = y_1$ este o soluție particulară a ecuației (XX.14), liniar independentă de y_0. Într-adevăr, dacă $y^{(2)} - y^{(1)} = \alpha y_0$, atunci ambele funcții $y^{(1)}$ și $y^{(2)}$ ar trebui să satisfacă la extremitățile intervalului condițiile (XX.15) și (XX.19), ceea ce este imposibil în baza lemei 3.

Dîndu-ne y_0, putem determina funcțiile $y^{(2)}$, $y^{(1)}$ și y_1. Să punem

$$z_0 = \frac{y_0}{p(y_0' y_1 - y_1' y_0)}, \quad z_1 = \frac{y_1}{p(y_0' y_1 - y_1' y_0)}.$$

Se verifică direct că funcțiile $y^{(1)}$ și $y^{(2)}$ pot fi exprimate cu ajutorul lui y_0 și y_1 sub forma

$$y^{(1)}(x_0) = y_0(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)\, z_1(x)\, dx - y_1(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)\, z_0(x)\, dx,$$

$$y^{(2)}(x_0) = y_0(x_0)\int_1^{x_0} y_0(x)\, z_1(x)\, dx - y_1(x_0)\int_1^{x_0} y_0(x)\, z_0(x)\, dx.$$

Într-adevăr, egalitățile $y^{(1)}(0) = y^{(2)}(1) = 0$ sînt evidente. Mai departe,

$$y^{(1)\prime}(0) = [y_0(0)]^2 z_1(0) - y_1(0) y_0(0) z_0(0) = 0,$$

$$y^{(2)\prime}(1) = [y_0(1)]^2 z_1(1) - y_1(1) y_0(1) z_0(1) = 0.$$

Înafară de aceasta,

$$y^{(1)\prime} = y_0'(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)\, z_1(x)\, dx - y_1'(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)\, z_0(x)\, dx,$$

$$y^{(1)\prime\prime} = y_0''(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)\, z_1(x)\, dx - y_1''(x_0)\int_0^{x_0} y_0(x)\, z_0(x)\, dx +$$

$$+ [y_0'(x_0) z_1(x_0) - y_1'(x_0) z_0(x_0)] y_0(x),$$

de unde $Ly^{(1)} = y_0(x)$, ceea ce trebuie demonstrat.

La fel se demonstrează și formula pentru $y^{(2)}$. Alcătuind diferența

$$y_1(x_0) = y^{(2)}(x_0) - y^{(1)}(x_0) = -y_0(x_0)\int_0^1 y_0(x)\, z_1(x)\, dx +$$

$$+ y_1(x_0)\int_0^1 y_0(x)\, z_0(x)\, dx,$$

vedem că

$$\int_0^1 y_0(x)\, z_1(x)\, dx = 0,$$

$$\int_0^1 y_0(x)\, z_0(x)\, dx = 1,$$

adică

$$\int_0^1 y_0(x)\, z^{(1)}(x)\, dx = \int_0^1 y_0(x)\, z^{(2)}(x)\, dx = C.$$

Să arătăm că funcția

$$G_1 = \begin{cases} y_0(x_0) z^{(1)}(x) + y^{(2)}(x_0) z_0(x) - C y_0(x_0) z_0(x), & x \leqslant x_0, \\ y_0(x_0) z^{(2)}(x) + y^{(1)}(x_0) z_0(x) - C y_0(x_0) z_0(x), & x \geqslant x_0 \end{cases}$$

satisface toate cele patru condiții specificate mai sus.

1. Condițiile (XX.23) sînt evident satisfăcute, deoarece ele sînt satisfăcute de $z_0(x)$, precum și de $z^{(1)}$ pentru $x = 0$, ca și de $z^{(2)}$ pentru $x = 1$.

2. Ecuația (XX.34) este satisfăcută în baza lui (XX.38). Este evident

$$MG_1 = y_0(x_0) z_0(x).$$

3. Continuitatea lui G_1 este evidentă. Pentru saltul derivatei lui G_1 în punctul de discontinuitate, avem

$$G_{1x}'(x_0 + 0, x_0) - G_{1x}'(x_0 - 0, x_0) =$$

$$= y_0(x_0)\,[z^{(2)\prime}(x_0) - z^{(2)\prime}(x_0)] + [y^{(1)}(x_0) - y^{(2)}(x_0)] z_0'(x_0) =$$

$$= y_0(x_0) z_1'(x_0) - y_1(x_0) z_0'(x_0) = \frac{1}{p(x_0)}.$$

Însfîrșit,

$$4.\ \int_0^1 G_1(x, x_0)y_0(x)dx = -Cy_0(x_0) + y_0(x_0)\int_0^1 y_0(x)z^{(2)}(x)dx +$$

$$+ y_0(x_0)\int_0^{x_0}[z^{(1)}(x) - z^{(2)}(x)]y_0(x)\,dx +$$

$$+ [y^{(2)}(x_0) - y^{(1)}(x_0)]\int_0^{x_0} z_0(x)y_0(x)\,dx +$$

$$+ y^{(1)}(x_0)\int_0^1 y_0(x)z_0(x)\,dx = -Cy_0(x_0) +$$

$$+ Cy_0(x_0) + y^{(1)}(x_0) - y^{(1)}(x_0) = 0.$$

Este evident că funcția generalizată a lui Green $G_1(x, x_0)$, ca funcție de variabila x_0, servește la rîndul său drept funcție generalizată a lui Green pentru operatorul adjunct Mz cu condițiile la limită (XX.18) și (XX.21). Cu ajutorul ei, soluția ecuației (XX.1), satisfăcînd condițiile (XX.13′), poate fi reprezentată sub forma

$$y(x_0) = \int_0^1 G_1(x, x_0)f(x)\,dx + C_1y_0(x_0), \qquad \text{(XX.39)}$$

numai dacă $f(x)$ satisface condiția

$$\int_0^1 f(x)z_0(x)\,dx = 0. \qquad \text{(XX.40)}$$

Din demonstrație rezultă între altele că condiția (XX.40) nu este numai necesară ci și suficientă pentru ca ecuația (XX.1) să fie rezolvabilă cu condițiile (XX.13′).

Nu vom face demonstrația tuturor acestor afirmații deoarece aceasta coincide în totul cu cea făcută pentru funcția lui Green.

Pentru ecuația de ordinul al doilea și în condițiile considerate, problema omogenă ar putea avea numai o singură soluție nebanală.

Pentru ecuațiile de ordin superior, se poate întîmpla ca problema omogenă corespunzătoare să admită cîteva soluții liniar independente $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Atunci, funcția lui Green generalizată trebuie să satisfacă ecuația corespunzătoare

$$MG = \sum_{i=1} y_i(x_0)z_i(x),$$

și în locul unei singure condiții (XX.36) vom avea cîteva condiții asemănătoare. Nu vom face analiza amănunțită a acestor cazuri.

Să trecem la examinarea cîtorva exemple.

§ 7. Exemple

Exemplul 1. Să căutăm soluția ecuației

$$Ly = y'' = f(x) \qquad \text{(XX.41)}$$

cu condițiile

$$y|_{x=0} = a_0, \qquad \text{(XX.42)}$$
$$y|_{x=1} = a_1.$$

Singura soluție a ecuației $y'' = 0$ cu condițiile $y|_{x=0} = y|_{x=1} = 0$, este nulă.

Conform teoriei generale expuse mai sus, există funcția lui Green

$$G = \begin{cases} x(x_0 - 1), & x \leqslant x_0, \\ x_0(x - 1), & x \geqslant x_0. \end{cases} \qquad \text{(XX.43)}$$

Soluția problemei va fi

$$y(x_0) = a_0(1 - x_0) + a_1x_0 +$$

$$+ (x_0 - 1)\int_0^{x_0} f(x)x\,dx + x_0\int_{x_0}^1 f(x)(x - 1)\,dx. \qquad \text{(XX.44)}$$

Exemplul 2. Să căutăm soluția ecuației (XX.41) cu condițiile

$$y'|_{x=0} = a_0,\ y'|_{x=1} = a_1. \qquad \text{(XX.45)}$$

În acest caz ecuația $y'' = 0$ admite o soluție, care satisface condițiile

$$y'|_{x=0} = y'|_{x=1} = 0, \qquad \text{(XX.46)}$$

și anume

$$y = 1.$$

Prin urmare, funcția lui Green nu există în acest caz, fiind astfel necesară construirea funcției generalizate a lui Green. Avem

$$y_0 = 1, \quad z_0 = 1$$

$$y_1 = x, z_1, = x.$$

Mai departe,

$$z^{(1)} = \frac{1}{2} x^2, \quad z^{(2)} = \frac{1}{2} (1 - x)^2.$$

Atunci,

$$y^{(1)} = \frac{1}{2} x^2, \; y^{(2)} = \frac{1}{2} (1 - x)^2, \; C = \frac{1}{6}.$$

Funcția G_1 va avea forma

$$G_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (1 - x_0)^2 - \frac{1}{6}, & x_0 \geqslant x, \\ \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} (1 - x)^2 - \frac{1}{6}, & x \geqslant x_0. \end{cases} \tag{XX.47}$$

Exemplul 3. Să considerăm aceeași ecuație (XX.41) în intervalul $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, unde x reprezintă lungimea unui arc pe cercul unitate, măsurat de la un anumit punct inițial. Punctele, ale căror coordonate diferă printr-un multiplu de 2π, sînt identice.

Este evident că funcția căutată y trebuie să fie o funcție periodică cu perioadă 2π.

Obținem pentru ea condițiile:

$$y|_{x=2\pi} = y|_{x=0}, \; y'|_{x=2\pi} = y'|_{x=0}. \tag{XX.48}$$

Aceste condiții exprimă proprietatea că funcția y este continuă pe cerc împreună cu prima sa derivată. Faptul, că punctul $x = 0$ joacă în aceste condiții un rol special, este legat numai de alegerea originii sistemului de referință.

N-am dezvoltat sub formă generală teoria unor asemenea probleme, însă, avînd în vedere completa asemănare cu cele expuse pînă acuma, ne vom limita la studierea acestui exemplu.

Nu este greu să ne convingem că ecuația omogenă

$$y'' = 0$$

admite, ca și în problema precedentă, soluția nebanală $y = 1$, satisfăcînd condițiile (XX.48). Va trebui să construim prin urmare funcția lui Green generalizată.

Această construcție se realizează cel mai simplu folosind periodicitatea funcției căutate precum și faptul că toate punctele cercului sînt echivalente; de aceea, funcția lui Green depinde numai de diferența $x - x_0$.

Putem pune atunci de la început $x_0 = \pi$.

Ecuația pentru funcția lui Green are forma

$$\frac{d^2 G_1}{dx^2} = 0,$$

iar soluția sa va fi, evident, trinomul de gradul al doilea

$$G_1(x, \pi) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3, \; -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Din condiția de continuitate rezultă

$$G_1(\pi - 0, \pi) - G_1(\pi + 0, \pi) = G_1(\pi, \pi) - G_1(-\pi, \pi) = 2\pi c_2,$$

de unde

$$c_2 = 0.$$

Mai departe, exprimînd condiția referitoare la saltul derivatei, obținem

$$G_1'(\pi + 0, \pi) - G_1'(\pi - 0, \pi) = -4\pi c_1 = 1,$$

de unde

$$c_1 = -\frac{1}{4\pi}.$$

Înafară de aceasta, funcția lui Green trebuie să fie ortogonală cu o constantă, de unde

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx + 2\pi c_3 = 0,$$

sau

$$c_3 = \frac{\pi}{12}.$$

Avem, în definitiv

$$G_1(x, \pi) = -\frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{\pi}{12}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant +\pi.$$

Datorită periodicității, $G_1(x, \pi) = G_1(x, (2k+1)\pi)$, și, în cazul general,

$$G_1(x, x_0) = \begin{cases} G_1(x - x_0 + \pi, \pi) = -\dfrac{1}{4\pi}(x - x_0 + \pi)^2 + \dfrac{\pi}{12} \\ \qquad \text{pentru } x_0 - 2\pi \leqslant x \leqslant x_0, \\ G_1(x - x_0 - \pi, -\pi) = -\dfrac{1}{4\pi}(x - x_0 - \pi)^2 + \dfrac{\pi}{12} \\ \qquad \text{pentru } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 2\pi. \end{cases} \tag{XX.49}$$

Funcția lui Green, astfel construită, este simetrică în raport cu x și x_0 și se bucură de toate proprietățile care au fost stabilite mai sus pentru funcția lui Green generalizată.

În problemele practice ne lovim adesea de cazurile cînd în ecuația (XX.1) $p(0) = 0$ sau $p(1) = 0$, iar uneori în cazul cînd ambele extremități ale intervalului sînt zerouri, pentru funcția $p(x)$. În aceste condiții, putem construi totuși uneori funcția lui Green introducînd anumite restricții suplimentare. Ne vom opri asupra analizei unui exemplu care ne va fi util în cele ce urmează.

Să considerăm ecuația

$$Ly \equiv xy'' + y' - \frac{m^2}{x}y = f(x), \tag{XX.50}$$

în care m este un număr întreg și să căutăm soluția acestei probleme, care satisface condiția

$$y|_{x=1} = 0. \tag{XX.51}$$

Integralele ecuației omogene

$$Ly = 0$$

sînt, cum se poate vedea ușor

$$y_1 = x^m, \quad y_2 = x^{-m}.$$

Una din ele nu este mărginită pentru începutul intervalului. De aceea, pentru ca una din constantele care intră în soluția

generală a ecuației omogene să fie complet determinată, este suficient să cerem ca

$$|y| \leqslant \frac{1}{x^{m-1}}.$$

Cealaltă constantă se determină cu ajutorul condiției (XX.51). Operatorul adjunct coincide în cazul dat cu cel inițial

$$Lz \equiv Mz.$$

Este natural să înlocuim, în determinarea funcției lui Green, condiția pentru $x = 0$, cu condiția ca G să fie mărginit. Funcția lui Green se scrie pentru problema noastră sub forma

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^m}x^m(x_0^m - x_0^{-m}), & x \leqslant x_0, \\ \dfrac{1}{2^m}x_0^m(x^m - x^{-m}), & x \geqslant x_0. \end{cases} \tag{XX.52}$$

Să admitem că $f(x)$ satisface inegalitatea

$$|f(x)| < \frac{A}{x^k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m.$$

Aplicînd formula (XX.26) soluției căutate, vom avea

$$y(x_0) = \frac{x_0^m - x_0^{-m}}{2m}\int_0^{x_0} x^m f(x)dx + \frac{x_0^m}{2m}\int_{x_0}^1 (x^m - x^{-m})f(x)dx.$$

Această soluție poate fi evaluată fără dificultăți

$$|y(x_0)| \leqslant \frac{x_0^{-m}}{2m}\int_0^{x_0} x^{m-k}Adx + \frac{x_0^m}{2m}\int_{x_0}^1 x^{-m-k}Adx + \frac{x_0^m}{2m}\int_0^1 Ax^{m-k}dx \leqslant$$

$$\leqslant A\left(\frac{x_0^{-k+1}}{2m(m-k+1)} + \frac{x_0^{-k+1}}{2m(m+k-1)} + \frac{x_0^m}{2m(m-k+1}\right),$$

sau

$$|y(x_0)| \leqslant \frac{A_1}{x_0^{k-1}}.$$

Prin urmare, soluția va satisface condițiile impuse, întrucît $k \leqslant m$.

Dacă $m = 0$, soluţiile ecuaţiei omogene vor fi

$$y_1 = 1,\ y_2 = \lg x.$$

Cu acestea putem căuta o soluţie mărginită pentru $f(x)$ mărginite.

Pentru ecuaţiile de ordin superior este posibilă de asemenea construirea funcţiei lui Green.

Să ne limităm din nou la un exemplu.

Să considerăm soluţia ecuaţiei din exemplul 1 § 2 (XX) cu condiţiile (XX. 9).

Funcţia lui Green $G(x, x_0)$ se determină acum cu ajutorul formulelor

$$G(x, x_0) = 0,\ x > x_0,$$
$$MG = 0,\ x < x_0,$$

şi satisface condiţiile

$$G|_{x=x_0} = G'_x|_{x=x_0} = G''_{xx}|_{x=x_0} = \ \ldots\ = G^{(n-2)}_{xx\ldots x}|_{x=x_0} = 0$$

$$G^{(n-1)}_{xx\ldots x}|_{x=x_0-0} = -\frac{1}{p_0(x_0)}.$$

Cu ajutorul acestei funcţii a lui Green, soluţia problemei se obţine sub forma

$$y(x_0) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x)\, dx.$$

Cititorii pot verifica singuri aceasta, în mod direct. Funcţia lui Green definită cu ajutorul acestor condiţii se deosebeşte, ca şi mai înainte, numai prin permutarea argumentelor de funcţiile lui Green pentru problema adjunctă.

LECŢIA XXI

FUNCŢIA LUI GREEN PENTRU LAPLACIAN

§ 1. Funcţia lui Green pentru problema lui Dirichlet

După ce am studiat cazurile cele mai importante de construcţie a funcţiei lui Green pentru ecuaţiile ordinare, vom trece la studierea funcţiei lui Green pentru diferite probleme legate de ecuaţia lui Poisson.

Să considerăm în spaţiul raportat la sistemul de coordonate x, y, z un anumit domeniu Ω, mărginit de o suprafaţă S suficient de netedă.

Vom căuta o funcţie u, care să satisfacă în acest domeniu ecuaţia

$$\Delta u = f(P) \qquad \text{(XXI.1)}$$

şi una din următoarele condiţii:

$$u|_S = F_0(S) \qquad \text{(XXI.2)}$$

sau

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = F_1(S). \qquad \text{(XXI.3)}$$

O asemenea problemă se întîlneşte, de exemplu, în determinarea potenţialului unui cîmp electric cu o distribuţie de sarcini dată.

La o problemă de acest tip se reduce şi problema determinării formei de echilibru a unei membrane supusă la o forţă transversală dată etc.

După cum se ştie, laplacianul este un operator autoadjunct. De asemenea, autoadjuncte sînt şi condiţiile omogene

$$u\Big|_S = 0 \ \text{ sau } \ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0,$$

corespunzătoare condițiilor (XXI.2) sau (XXI.3), așa cum rezultă clar din formula lui Green clasică

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)d\Omega = \iint_{S}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \qquad \text{(XXI.4)}$$

Considerațiile pe care le vom face pot fi transpuse fără nici un fel de dificultăți și asupra cazului unor condiții mai generale; noi însă nu vom atinge această chestiune.

D e f i n i ț i e. *Numim funcția lui Green pentru ecuația* (XXI.1) *cu condiția* (XXI.2) *sau funcția lui Green pentru problema lui Dirichlet, funcția* $G(P, P_0)$ *de două puncte variabile* P *și* P_0, *care satisface următoarele condiții:*

1. *Funcția* $G(P, P_0)$ *este o funcție armonică de punctul* P *în întreg domeniul* Ω, *exceptînd punctul* P_0.

2. *Funcția* $G(P, P_0)$, *ca funcție de punctul* P, *satisface condiția*

$$G(P, P_0)|_S = 0.$$

3. *In domeniul* Ω *funcția* $G(P, P_0)$ *admite reprezentarea*

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(P, P_0),$$

în care r *este distanța dintre* P *și* P_0, *iar* $g(P, P_0)$ *este o funcție armonică regulată.*

Funcția $G(P, P_0)$ este cu totul analogă funcției lui Green, construită anterior de noi pentru ecuația liniară ordinară.

În loc de a folosi definiția dată putem introduce această funcție prin analogie cu considerațiile precedente, ca o funcție de influență (v. § 2 lecția XX). Totuși, noi nu ne vom opri mai amănunțit asupra acestui punct.

Să stabilim existența funcției lui Green pentru problema lui Dirichlet.

Conform proprietății 3,

$$G(P, P_0) - \frac{1}{4\pi r} = g(P, P_0)$$

este o funcție armonică de punctul P în întreg domeniul Ω:

$$\Delta g = 0. \qquad \text{(XXI.5)}$$

Valorile sale limită pe S vor fi

$$g(P, P_0)\Big|_S = -\frac{1}{4\pi r}\Big|_S. \qquad \text{(XXI.6)}$$

Conform condițiilor (XXI.5) și (XXI.6), funcția $g(P, P_0)$, se construiește rezolvînd problema lui Dirichlet corespunzătoare acestor condiții.

Să studiem încă o proprietate importantă a funcției lui Green. În prealabil vom demonstra încă o lemă.

L e m a l u i L i a p u n o v. *Să considerăm un domeniu* Ω, *mărginit de suprafața* S *continuu derivabilă de două ori. Să ducem două suprafețe* S_1 *și* S_2 *la distanța* h *de ambele părți ale lui* S, *cu* $h < d$, *unde* d *este raza de curbură minimă a suprafeței* S.

Să presupunem că funcția $F(x, y, z)$ *este continuă împreună cu derivatele sale de ordinul întîi, în fîșia cuprinsă între* S_1 *și* S_2, *și că derivatele de ordinul al doilea sînt continue peste tot în această fîșie, cu excepția suprafeței* S, *expresia* ΔF *fiind mărginită.*

Atunci funcția armonică în interiorul lui Ω, *care coincide cu* F *pe suprafața* S, *posedă o derivată normală regulată pe* S.

Pentru demonstrarea acestei leme, vom aplica formula lui Green separat ambelor straturi cuprinse pe de o parte între S_1 și S, și pe de altă parte între S_2 și S. Pentru punctul P_0, care se găsește în stratul interior Ω_1, vom avea

$$F(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S+S_1}\left(F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\right) dS - \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega_1}\frac{1}{r}\Delta F\, d\Omega,$$

sau

$$F(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S} F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS + \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\iint_{S+S_1}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega_1}\frac{1}{r}\Delta F\, d\Omega.$$

Integralele din membrul drept

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega_1}\frac{1}{r}\Delta F\, d\Omega,\ \frac{1}{4\pi}\iint_{S+S_1}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}dS,\ \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}dS$$

admite derivate normale regulate. Aceasta rezultă din teorema 2,

a lecției XV. Membrul stîng admite derivate continue de ordinul întîi în vecinătatea lui S.

Prin urmare, integrala

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS$$

are de asemenea o derivată normală regulată.

Analog pentru punctul P_0, care se găsește în exteriorul suprafeței S, avem

$$0=\frac{1}{4\pi}\iint_{S+S_\varepsilon}\left(F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega_1}\frac{1}{r}\,\Delta F\,d\Omega,$$

de unde ne convingem prin aceleași raționamente că integrala

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS$$

admite o derivată normală regulată și în exteriorul domeniului Ω.

În baza teoremei lui Liapunov (lecția XV), vedem că funcția armonică în Ω care ia pe S valori egale cu valorile funcției F, admite o derivată normală regulată, ceea ce trebuia demonstrat.

Putem stabili acum încă o proprietate importantă a funcției lui Green.

Teorema 1. *Dacă suprafața S satisface condițiile lemei lui Liapunov, atunci funcția lui Green, ca funcție de punctul P, admite o derivată normală regulată, cînd punctul P_0 se găsește în interiorul lui Ω.*

Demonstrația acestei teoreme rezultă nemijlocit din lema lui Liapunov. Într-adevăr, avem

$$G=\frac{1}{4\pi r}-g.$$

Funcția $\frac{1}{4\pi r}$ are, evident, o derivată normală regulată. Funcția g ia pe suprafața S aceleași valori ca și funcția $\frac{1}{4\pi r}$, care este de două ori continuu derivabilă în fîșia din vecinătatea lui S.

Conform lemei lui Liapunov g admite o derivată normală regulată, ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 2. *Soluția ecuației* (XXI. 1) *cu condițiile* (XXI. 2) (*dacă aceasta există*) *se reprezintă sub forma*:

$$u(P_0)=\iint_S F_0(S)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS-\iiint_\Omega G(P,P_0)\,f(P)\,dP. \qquad \text{(XXI.7)}.$$

Pentru demonstrație, aplicăm formula lui Green domeniului Ω', obținut din Ω prin eliminarea în jurul punctului P_0 a unei sfere mici avînd suprafața σ și raza δ. Ca funcții u și v considerăm soluția necunoscută u a ecuației (XXI.1) și funcția lui Green G. În domeniul indicat, atît u cît și G vor fi continue împreună cu primele lor derivate. Obținem

$$\iiint_{\Omega'} G(P,P_0)\,\Delta u\,dP=\iint_{S'}\left(u\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

în care S' este suprafața completă a lui Ω'.

Vom nota cu n' direcția normalei interioare la suprafața σ, în raport cu domeniul Ω'. Să presupunem că n este direcția normalei care pornește din centrul sferei σ. Luînd în considerație faptul că funcția G se anulează pe S, obținem

$$\iiint_{\Omega'} G(P,P_0)\,f(P)\,dP=$$

$$=\iint_S F_0(S)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS-\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma-$$

$$-\iint_\sigma\left(u\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Am pus semnul minus în fața ultimului termen pentru motivul că la integrarea în raport cu σ, direcția normalei n este opusă direcției normalei interioare n'.

Limita ultimei integrale este nulă pentru $\delta\to 0$, datorită faptului că u și g și derivatele lor sînt mărginite.

Mai departe,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint_{\sigma}u\,d\sigma-\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint_{\sigma}\delta\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma.$$

Limita primului termen este limita valorii medii u de pe sfera σ și este egală cu $u(P)$. Limita celui de-al doilea termen este evident nulă. Folosindu-ne de accstea, obținem dintr-odată formula căutată (XXI.7).

Teorema 3. *$G(P, P_0)$ este o funcție simetrică de argumentele sale.*

Pentru demonstrație aplicăm formula lui Green funcțiilor $G(P, P_1)$ și $G(P, P_2)$ în domeniul Ω'', obținut prin extragerea din Ω a ambelor puncte P_1 și P_2 cu ajutorul a două sfere mici. Notînd cu S'' frontiera domeniului Ω'', vom avea

$$\iint_{S''}\left(G(P, P_1)\frac{\partial G(P, P_2)}{\partial n}-G(P, P_2)\frac{\partial G(P, P_1)}{\partial n}\right)dS''=0.$$

Integrala extinsă la suprafața S este nulă, deoarece pe ea devin nule ambele funcții $G(P, P_1)$ și $G(P, P_2)$.

Limita integralei extinsă la sfera din jurul lui P_1 va fi evident egală cu $G(P_1, P_2)$, iar limita integralei extinsă la sfera din jurul lui P_2 este $G(P_2, P_1)$, de unde

$$G(P_1, P_2)=G(P_2, P_1),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 4. *Funcția $u(P)$ determinată cu ajutorul formulei* (XXI.7) *ne dă soluția problemei propuse.*

Pentru demonstrație este suficient să stabilim existența soluției, deoarece în baza teoremei 2, soluția trebuie să fie exprimată cu ajutorul formulei (XXI.7), dacă aceasta există. Fie potențialul newtonian al domeniului Ω cu densitatea $f(P)$

$$\psi(P_0)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{f(P)}{r}dv.$$

Funcția ψ satisface ecuația lui Poisson

$$\Delta\psi=f.$$

Să punem $v=u-\psi$. Dacă vom găsi o funcție armonică v, care satisface condițiile

$$v|_S=u|_S-\psi|_S,$$

atunci, $u=v+\psi$ va fi soluția problemei. Existența, însă, a unei asemenea funcții v rezultă din cercetarea problemei lui Dirichlet, făcută anterior. Teorema 3 este demonstrată.

Prezintă interes încă o proprietate. Funcția lui Green satisface inegalitatea

$$G(P, P_0)\leqslant\frac{1}{4\pi r}.$$

Aceasta rezultă din faptul că funcția g este negativă pe contur și, prin urmare, negativă peste tot.

După cum am construit funcția lui Green pentru problema lui Dirichlet din spațiu, am fi putut construi o funcție — analogă și pentru plan. Ar fi fost necesar să punem în evidență în locul termenului $\frac{1}{4\pi r}$ termenul $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$.

Soluția s-ar fi exprimat, evident, cu ajutorul formulei (XXI.7), în care prin Ω se înțelege domeniul plan, iar prin S, curba care îl mărginește.

§ 2. Funcția lui Green pentru problema lui Neumann

În rezolvarea problemei lui Neumann, atît pentru spațiu cît și pentru plan, ne-am lovi de dificultatea că funcția lui Green nu există în sensul în care am vrea s-o construim, deoarece problema omogenă corespunzătoare admite o soluție nebanală, egală cu o constantă. Ar trebui să căutăm funcția lui Green generalizată, cu alte cuvinte ar trebui să cerem ca aceasta să satisfacă nu ecuația lui Laplace, ci ecuația

$$\Delta G(P, P_0)=C. \qquad \text{(XXI.8)}$$

Să studiem această chestiune mai amănunțit. Vom arăta că există o soluție a ecuației (XXI.8) care are forma

$$G_1=\frac{1}{4\pi r}+g, \qquad \text{(XXI.9)}$$

unde $\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big|_S = 0$, iar g este o funcție regulată în domeniu. Pentru aceasta este suficient să arătăm că pentru o constantă C aleasă convenabil, există o funcție care satisface ecuația (XXI.8) și condiția

$$\frac{\partial g}{\partial n}\Big|_S = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Big|_S.$$

Vom căuta pe g sub forma $g = \alpha R^2 + g_1$, în care $R^2 = x^2+y^2+z^2$, iar g_1 este o funcție armonică. Pentru funcția g_1 obținem condiția la limită

$$\frac{\partial g_1}{\partial n}\Big|_S = -\alpha\frac{\partial R^2}{\partial n}\Big|_S - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Big|_S. \qquad \text{(XXI.10)}$$

Vom stabili că pentru o alegere convenabilă a constantei α, are loc egalitatea

$$\iint_S \left[\alpha\frac{\partial R^2}{\partial n}\Big|_S + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right] dS = 0. \qquad \text{(XXI.11)}$$

De aici, va rezulta existența unei funcții armonice, care satisface condiția (XXI.10). Atunci, avem

$$\Delta g = 6\alpha = C.$$

Prin urmare, de aici va rezulta existența funcției G_1, care satisface condițiile (XXI.8) și (XXI.9). Această funcție G_1 o vom numi funcția lui Green pentru problema lui Neumann. Avem:

$$\iint_S \alpha\frac{\partial R^2}{\partial n}\,dS = \alpha\iiint_\Omega \Delta(R^2)\,dS = 6\alpha\, m\Omega,$$

în care $m\Omega$ este volumul domeniului Ω. Mai departe,

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,dS = \frac{1}{4\pi}\iint_S d\omega = 1.$$

Condiția (XXI.11) este îndeplinită dacă punem $\alpha = -\frac{1}{6m\Omega}$.

Cu ajutorul funcției lui Green G_1 putem construi soluția următoarei probleme: să se găsească funcția u care satisface ecuația

$$\Delta u = f(P)$$

cu condiția $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0$.

Condiția necesară și suficientă pentru ca această problemă să fie rezolvabilă constă în

$$\iiint_\Omega f(P)\,dv = 0.$$

Dacă această condiție este îndeplinită atunci

$$u(P_0) = \iiint_\Omega G(P, P_0)\,f(P)\,dv.$$

Lăsăm verificarea acestei afirmații în seama cititorilor.

Să considerăm un exemplu.

Exemplu. Să construim funcția lui Green pentru problema lui Neumann relativă la sfera $R \leqslant 1$, în care $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Conform definiției,

$$G = \frac{1}{4\pi r} + g,$$

în care

$$\Delta G = \text{const.}\ \frac{\partial g}{\partial n}\Big|_{R=1} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Big|_{R=1}.$$

Pentru comoditate vom presupune că polul funcției lui Green se găsește în punctul de coordonate $0, 0, z_0$. Atunci, $r = \sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Big|_{R=1} = -\frac{x\cos nx + y\cos ny + (z-z_0)\cos nz}{r^3}\Big|_{R=1}.$$

Însă, pe suprafața $R = 1$, avem $\cos nx = -x$, $\cos(ny) = -y$, $\cos nz = -z$.

De aici,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Big|_{R=1} = \frac{1-z_0 z}{r^3}\Big|_{R=1}. \qquad \text{(XXI.12)}$$

Să introducem încă numărul $z_0' = \frac{1}{z_0}$ și funcția

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0')^2}.$$

Este evident că

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|_{R=1} = \left.\frac{1 - z_0' z}{r_1^3}\right|_{R=1}.$$

Punînd în formula (X.8) $R_0 = z_0$, $\rho = r_1$, $R = 1$, avem :

$$r\,|_{R=1} = z_0\, r_1\,|_{R=1}$$

Folosindu-ne de acestea, obținem

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|_{R=1} = z_0^2 \left.\frac{z_0 - z}{r^3}\right|_{R=1}, \qquad \text{(XXI.13)}$$

de unde

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{R=1} + \frac{1}{z_0}\left.\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\right|_{R=1} = \left.\frac{1 - 2zz_0 + z_0^2}{r^3}\right|_{R=1} = \left.\frac{1}{r}\right|_{R=1}$$

Pentru a termina calculele preliminare, să considerăm încă funcția

$$w = \lg (z_0 - z + r_1).$$

Să arătăm că w este o funcție armonică. Într-adevăr,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{r_1 (z_0' - z + r_1)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{r_1 (z_0' - z + r_1)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-1 + \frac{z - z_0'}{r_1}}{z_0' - z + r_1} = -\frac{1}{r_1},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{(z_0' - z)(r_1^2 - x^2) + r_1^3 - 2r_1 x^2}{r_1^3 (z_0' - z + r_1)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{(z_0' - z)(r_1^2 - y^2) + r_1^3 - 2r_1 y^2}{r_1^3 (z_0' - z + r_1)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z^2} = \frac{z - z_0'}{r_1^3}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{z_0' - z}{r_1^3}.$$

De aici, rezultă că $\Delta w = 0$.

Să calculăm încă expresia lui $\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{R=1}$. Vom avea

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{R=1} = \left.\frac{x\cos nx + y\cos ny - (z_0' - z + r_1)\cos nz}{r_1 (z_0' - z + r_1)}\right|_{R=1} =$$

$$= \left.\frac{-\left[r_1^2 - (z_0' - z)^2\right] - z(r_1 + z_0' - z)}{r_1 (z_0' - z + r_1)}\right|_{R=1} = \left.\frac{r_1 - z_0'}{r_1}\right|_{R=1} = \qquad \text{(XXI.14)}$$

$$= -1 + \left.\frac{z_0'}{r_1}\right|_{R=1} = -1 + \left.\frac{1}{z_0 r_1}\right|_{R=1} = -1 + \left.\frac{1}{r}\right|_{R=1}.$$

Folosindu-ne de (XXI.12), (XXI.13) și (XXI.14), este ușor să verificăm că funcția lui Green trebuie să aibă forma

$$G = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{z_0}\frac{1}{4\pi r_1} - \frac{w}{4\pi} - \frac{R^2}{8\pi} + C,$$

în care C este o constantă arbitrară determinată din condiția

$$\iiint_{R \leq 1} G\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Calculul pe care nu-l vom face aici în mod amănunțit, ne dă

$$C = -\frac{z_0^2}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} \ln z_0.$$

În legătură cu aceasta, obținem în definitiv

$$G = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{r_0}\frac{1}{4\pi r} - \frac{w}{4\pi} - \frac{R^2}{8\pi} - \frac{z_0^2}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} \lg z_0.$$

Revenind la notațiile lecției XIX, obținem de aici

$$G = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2RR_0\cos\gamma + R_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1}} - \right.$$

$$\left. - \lg (1 - RR_0\cos\gamma + \sqrt{R^2 R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1}) - \frac{R^2}{2} - \frac{R_0^2}{2}\right\}.$$

LECȚIA XXII

PUNEREA CORECTĂ A PROBLEMELOR LA LIMITE DIN FIZICA MATEMATICĂ

§ 1. Ecuația căldurii

În problemele pe care le-am considerat pînă acum, însăşi metoda de rezolvare ne dădea. în majoritatea cazurilor, răspunsul la chestiunea dacă punerea uneia sau a alteia din probleme a fost corectă. Totuşi, în anumite alte probleme, este mai comod să stabilim, înainte de toate, în mod direct dacă problema a fost corect pusă.

Să considerăm ecuația propagării căldurii în spațiul raportat la sistemul de coordonate (x, y, z) într-un domeniu mărginit Ω, limitat de suprafața S, sub acțiunea unor surse interioare de căldură avînd densitatea $F(x, y, z)$. Fie $u(x, y, z, t)$ temperatura în punctul (x, y, z) la momentul t. Funcția u satisface ecuația

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} - F(x, y, z). \qquad \text{(XXII.1)}$$

Considerînd fluxul de căldură nenegativ peste tot, vom avea

$$F(x, y, z) = F(P) \geqslant 0. \qquad \text{(XXII.2)}$$

Să presupunem în afară de aceasta că sînt date următoarele condiții la limite şi inițiale

$$u|_S = f(Q, t),$$
$$u|_{t=0} = \varphi(P), \qquad \text{(XXII.3)}$$

unde Q este un punct de pe suprafața S, iar P un punct din domeniul Ω. Ecuațiile f şi φ sînt continue, iar valorile lui f pentru $t = 0$, coincid cu valorile lui φ pe frontiera S. Să demonstrăm următoarea teoremă.

Teorema 1. *In orice moment al intervalului de timp* $0 \leqslant t_0 \leqslant T$ *din interiorul domeniului* Ω *este valabilă inegalitatea*

$$u(P_0, t_0) \geqslant \inf_{\substack{P \subset \Omega,\ Q \subset S,\\ 0 \leqslant t \leqslant t_0}} \min[f(Q,t), \varphi(P)] \qquad \text{(XXII. 4)}$$

Cu alte cuvinte, valoarea cea mai mică a funcției este atinsă sau pentru $t = 0$, *sau pe frontiera domeniului* Ω.

Demonstrație. Să presupunem contrariul. Să admitem că în punctul P_0, funcția u ia la momentul t_0 o valoarea mai mare decît toate celelalte valori ale sale din domeniul Ω pentru $t=0$, sau de pe suprafața S în intervalul de timp $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Atunci,

$$u(P_0, t_0) - \inf_{\substack{P \subset \Omega,\ Q \subset S,\\ 0 \leqslant t \leqslant t_0}} \min.[f(Q, t)\ \varphi(P)] = -\varepsilon_0 < 0.$$

Să construim funcția

$$v(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) - \frac{\varepsilon_0}{2}\,\frac{t_0 - t}{t_0}.$$

Funcția v se bucură, ca şi u, de proprietatea că nu-şi atinge pentru $0 \leqslant t \leqslant t$ valoarea sa minimă, nici pentru $t = 0$, nici pe frontiera domeniului Ω. Aceasta rezultă chiar din faptul că valoarea sa în punctul (P_0, t) este mai mică decît minimul valorilor lui $v(x, y, z, t)$ pe frontieră sau pentru $t = 0$, cel puțin cu $\frac{\varepsilon_0}{2}$, deoarece

$$v(P_0, t) = u(P_0, t), \quad v|_S \geqslant u|_S - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad v|_{t=0} = u|_{t=0} - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Funcția v trebuie să-şi atingă valoarea sa minimă undeva în interiorul domeniului cu patru dimensiuni $\{\Omega, 0 \leqslant t \leqslant t\}$ sau pentru $t = t_0$. Acum este uşor să ne convingem că presupunerea făcută de noi ne conduce la o contradicție. Dacă minimul lui v s-ar găsi în interiorul lui Ω pentru $t < t_0$, atunci s-ar anula în acest punct primele derivate ale lui v în raport cu coordonatele spațiale şi în raport cu timpul, iar derivatele de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

ar fi nenegative. Prin urmare, expresia

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

ar fi de asemenea nenegativă. Pe de altă parte,

$$\Delta v = \Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2t_0},$$

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2t} < 0.$$

Astfel, obținem că un număr nenegativ este egal cu un număr negativ. Contradicția obținută ne arată injustețea presupunerii noastre.

Ne rămîne să considerăm cazul cînd v își atinge minimul pentru $t = t_0$. Este evident că derivata $\frac{\partial v}{\partial t}$ în punctul de minim, nu poate fi pozitivă, deoarece astfel, pentru valori mai mici ale lui t, funcția v ar lua în același punct valori mai mici și nu am mai avea un minim. Pe de altă parte, ca mai sus, în acest punct are loc inegalitatea

$$\Delta v \geqslant 0.$$

Repetînd raționamentele anterioare, ajungem la afirmația absurdă că expresia nenegativă

$$\Delta v - \overline{\frac{\partial v}{\partial t}}$$

trebuie să fie mai mică decît zero. Înseamnă că acest caz este de asemenea imposibil. Teorema este demonstrată.

Schimbînd semnul funcțiilor u, f, φ și F, obținem:

Consecința 1. *Dacă funcția F din ecuația* (XXII.1) *satisface inegalitatea*

$$F(x, y, z) \leqslant 0,$$

funcția u își atinge valoarea sa maximă, sau pentru $t = 0$, sau pe frontiera S a domeniului Ω.

Consecința 2. *O funcție $u(x, y, z, t)$, care satisface pentru $0 \leqslant t \leqslant T$ ecuația căldurii în domeniul Ω, își atinge, atît valoarea sa maximă, cît și valoarea sa minimă pentru $t = 0$ sau pe frontiera S a domeniului Ω.*

Din considerațiile făcute, rezultă unicitatea soluției pentru ecuația căldurii cu condițiile (XXII. 3) și dependența continuă

a acestei soluții de membrii drepți ai condițiilor la limite și ai condițiilor inițiale, adică faptul că punerea problemei la limite este corectă. Într-adevăr, dacă am fi avut două soluții oarecare ale problemei, diferența lor, satisfăcînd ecuația omogenă, s-ar fi anulat atît pentru $t = 0$, cît și pentru suprafața S. Însă atunci, în baza teoremei demonstrate, atît maximul, cît și minimul acestei diferențe ar fi nule. Prin urmare, această diferență ar fi fost ea însăși nulă. Înseamnă că problema noastră nu poate avea două soluții diferite.

În mod analog, se stabilește că problema a fost corect pusă. Dacă diferența funcțiilor care ne dau condițiile inițiale și condițiile la limită nu depășește în mărime absolută un anumit număr pozitiv ε, atunci și diferența soluțiilor corespunzătoare, ca soluție a ecuației omogene a propagării căldurii cu valori la limită mici, nu va depăși nici ea pe ε, în mărime absolută.

Teorema 2. *Soluția problemei* (XXII. 1) *depinde continuu nu numai de condiția* (XXII. 3), *ci și de termenul liber al ecuației* (XXII. 1). *Mai exact: dacă pentru $0 \leqslant t \leqslant t_0$, valorile funcțiilor f și φ sînt mai mici decît $\frac{\varepsilon_0}{2}$, iar funcția F satisface inegalitatea*

$$F \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2t_0},$$

atunci, pentru $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$ soluția ecuației (XXII.1) *satisface inegalitatea*

$$u < \varepsilon_0$$

Demonstrație. Să presupunem că soluția problemei noastre ia în punctul (P_0, t_0) o valoare care depășește pe ε_0. Să formăm funcția

$$v = u + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{t_0 - t}{t_0}.$$

Aceasta funcție trebuie să aibă un maximum în interiorul lui Ω pentru $0 < t < t_0$. Totuși, formînd pentru ea din nou expresia

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t},$$

ne convingem că aceasta este pozitivă peste tot în domeniul Ω pentru $0 < t < t_0$, ceea ce contrazice ipoteza existenței maximului.

Consecinţa 1. *Schimbînd semnul inegalităţilor referitoare la* φ, f, F, *adică presupunînd satisfăcute condiţiile*

$$\varphi > -\frac{\varepsilon_0}{2}, \quad f > -\frac{\varepsilon_0}{2}, \quad F > -\frac{\varepsilon_0}{2t_0},$$

obţinem pentru funcţia u *inegalitatea*

$$u > -\varepsilon_0.$$

Astfel, avem în definitiv,

Consecinţa 2. *Dacă*

$$|\varphi| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad |f| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad |F| < \frac{\varepsilon_0}{2t_0}$$

are loc în intervalul $0 < t < t_0$ *inegalitatea*

$$|u| < \varepsilon_0$$

pentru orice $P \subset \Omega$.

§ 2. Noţiunea de soluţie generalizată

În multe probleme ale fizicii matematice pe care le întîlnim, existenţa soluţiei se stabileşte numai prin adaptarea unor restricţii însemnate asupra condiţiilor la limite. Vom introduce o noţiune care ne permite să nu ne mai ocupăm în cele ce urmează de aceste chestiuni.

Fie trei şiruri de funcţii continue

$$F_n, \quad \varphi_n \quad \text{şi} \quad f_n,$$

care tind uniform, respectiv către funcţiile continue F, φ şi f şi să presupunem că ecuaţia

$$\Delta u_n - \frac{\partial u_n}{\partial t} = F_n$$

cu condiţiile

$$u|_{t=0} = \varphi_n, \quad u|_s = f_n$$

admite o soluţie u_n (conform celor demonstrate această soluţie este unică).

În baza teoremei 2 (XXII), diferenţa

$$u_m - u_n$$

este în valoare absolută oricît de mică vrem noi dacă m şi n sînt suficient de mari. Aceasta înseamnă că şirul u_n converge uniform către funcţia u, satisfăcînd condiţiile noastre la limită.

Nu ştim nimic însă despre convergenţa derivatelor lui u şi, de aceea, nu putem afirma că funcţia limită satisface ecuaţia

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = F. \qquad \text{(XXII.5)}$$

Vom numi funcţia u *soluţia generalizată a ecuaţiei* (XXII.5) cu condiţiile iniţiale şi condiţiile la limită date.

O asemenea soluţie generalizată este unică, deoarece nu pot exista două asemenea şiruri u_n şi $u_n^{(1)}$, pentru care funcţiile f_n şi $f_n^{(1)}$ φ_n şi $\varphi_n^{(1)}$, F_n şi $F_n^{(1)}$ să tindă respectiv o către aceeaşi limită, iar şirurile înseşi, să tindă către limite diferite : într-adevăr, în acest caz, şirul

$$u_1, \ u_1^{(1)}, \ u_2, \ u_2^{(1)}, \ldots, u_n, \ u_n^{(1)}, \ldots$$

ar fi divergent ceea ce este imposibil.

În loc să punem problema determinării soluţiei reale, practic este suficient să rezolvăm problema determinării soluţiei generalizate. Într-adevăr, noi nu cunoaştem mărimile exacte f, φ şi F. Valorile lor, pe care le considerăm, nu sînt exacte, însă diferă puţin de cele exacte. De aceea, soluţia generalizată, chiar dacă nu este cea reală, va diferi puţin de aceasta din urmă.

Am vorbit pînă acum despre soluţia generalizată a ecuaţiei căldurii. Acelaşi lucru îl putem spune şi despre ecuaţia lui Poisson, considerată mai sus.

La fel ca şi în cazul ecuaţiei căldurii, putem determina soluţia generalizată a ecuaţiei

$$\Delta u = \rho$$

cu condiţiile

$$u|_s = \varphi$$

sau

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = \psi,$$

ca limită a soluţiei ecuaţiei $\Delta u = \rho_n$ cu condiţiile

$$u|_s = \varphi_n$$

sau

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = \psi_n,$$

dacă $\rho_n \to \rho$, $\varphi_n \to \varphi$, $\psi_n \to \psi$, convergența fiind uniformă.

Să dăm un exemplu de existență a unei asemenea soluții generalizate.

Exemplul 1. Fie

$$\Delta u = \frac{x^2 - y^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R} - \frac{1}{(\ln R)^2}\right], \qquad \text{(XXII.6)}$$

unde

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Să arătăm că pentru $R \leqslant \frac{1}{2}$ funcția

$$u_0 = (x^2 - y^2) \ln |\ln R|$$

va fi soluția generalizată a ecuației (XXII.6) cu condiția la limită

$$u\big|_{R=\frac{1}{2}} = u_0\big|_{R=\frac{1}{2}}.$$

Într-adevăr, să punem

$$u_k = (x^2 - y^2) \ln |\ln R_k|,$$

unde $R_k = \sqrt{R^2 + \delta_k}$, $\delta_k \to 0$ pentru $k \to \infty$. Calculînd Δu_k, obținem

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = 2 \ln |\ln R_k| + \frac{4x^2}{R_k^2 \ln R_k} + (x^2 - y^2)\left[\frac{1}{R_k^2 \ln R_k} - \frac{2x^2}{R_k^4 \ln R_k} - \frac{x^2}{R_k^4 (\ln R_k)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = -2 \ln |\ln R_k| - \frac{4y^2}{R_k^2 \ln R_k} + (x^2 - y^2)\left[\frac{1}{R_k^2 \ln R_k} - \frac{2y^2}{R_k^4 \ln R_k} - \frac{y^2}{R_k^4 (\ln R_k)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = (x^2 - y^2)\left[\frac{1}{R_k^2 \ln R_k} - \frac{2z^2}{R_k^4 \ln R_k} - \frac{z^2}{R_k^4 (\ln R_k)^2}\right],$$

de aici

$$\Delta u_k = \frac{x^2 - y^2}{R_k^2}\left[\frac{5}{\ln R_k} - \frac{1}{(\ln R_k)^2}\right].$$

Șirul u_k converge uniform către funcția u_0 pentru $k \to \infty$. Împreună cu aceasta și șirul Δu_k tinde uniform către membrul drept al ecuației (XXII.6) pentru $R \leqslant \frac{1}{2}$. Într-adevăr, pentru $R < r$ și δ_k suficient de mic, atît Δu_k, cît și funcția

$$\frac{x^2 - y^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R} - \frac{1}{(\ln R)^2}\right]$$

vor fi oricît de mici vrem noi, dacă r este suficient de mic, iar pentru $r \leqslant R \leqslant \frac{1}{2}$ convergența uniformă este evidentă.

Prin urmare, u_0 este soluția generalizată a ecuației (XXII.6). Totuși în punctul (0, 0, 0) derivatele de ordinul al doilea ale lui u_0 nu au sens.

Soluția ecuației (XXII.6) cu condițiile la limită

$$u\big|_{R=\frac{1}{2}} = u_0\big|_{R=\frac{1}{2}}$$

nu există.

Dacă u ar fi fost o astfel de soluție, atunci diferența $u - u_0$ ar fi trebuit să fie o funcție armonică peste tot, în afară, poate, de originea coordonatelor, continuă peste tot și nulă pe frontiera domeniului. Totuși, am văzut mai înainte că orice funcție continuă și armonică peste tot în afară, poate, de un singur punct, este o funcție armonică și în acest punct.

În baza acestei teoreme, diferența $u - u_0$ este o funcție armonică, nulă pe suprafața sferei, adică egală cu zero. Aceasta înseamnă că unica soluție posibilă a problemei noastre este funcția u. Întrucît aceasta nu satisface ecuația (XXII.6) în originea coordonatelor, problema noastră nu admite, în general, o soluție.

Considerînd acum ecuația conductibilității căldurii cu același membru drept ca și (XXII.6):

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x^2 - y^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R} - \frac{2}{(\ln R)^2}\right],$$

şi rezolvînd-o din nou cu condiţiile

$$u\big|_{R=\frac{1}{2}} = u_0\big|_{R=\frac{1}{2}}, \qquad u\big|_{t=0} = u_0,$$

nu putem găsi soluţia acestei ecuaţii.

În aceste împrejurări, funcţia u_0 va servi din nou drept soluţie generalizată.

Se poate demonstra că orice funcţie continuă, care satisface ecuaţia omogenă a propagării căldurii peste tot, în afară de un singur punct (x_0, y_0, z_0) oricare ar fi timpul t, va satisface această ecuaţie peste tot, inclusiv acest punct. Folosindu-ne de aceasta şi repetînd raţionamentele făcute la cercetarea ecuaţiei lui Poisson, ne convingem de valabilitatea afirmaţiei făcute.

§ 3. Ecuaţia undelor

Să ne ocupăm acum de studierea ecuaţiei undelor

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \qquad \text{(XXII.7)}$$

şi să considerăm soluţia în domeniul Ω, mărginit de suprafaţa S, cu condiţiile iniţiale:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(P), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(P) \qquad \text{(XXII.8)}$$

şi cu condiţiile la limită

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = f(Q). \qquad \text{(XXII.9)}$$

Raţionamentul nostru se transpune fără nici un fel de modificări şi la cazul cînd în locul condiţiei (XXII.9) este dată pe frontieră însăşi funcţia necunoscută.

Vom presupune în ceea ce priveşte funcţia u, că în interiorul domeniului Ω, aceasta admite derivate continue pînă la ordinul al doilea inclusiv, derivatele sale de ordinul întîi, fiind continue în domeniul închis $\overline{\Omega}$.

Fără a limita generalitatea, putem considera întotdeauna că

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad f = 0.$$

În caz contrar, luînd în locul lui u o nouă necunoscută v conform formulei

$$v = u - w,$$

unde w satisface pe (XXII.8) şi (XXII.9), vom obţine imediat condiţiile omogene pentru v.

Să considerăm integrala

$$K_1(t) = \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx\, dy\, dz.$$

Calculînd pe $\frac{dK_1(t)}{dt}$ şi folosind ecuaţia (XXII.7), obţinem

$$\frac{dK_1}{dt} = 2\iiint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= 2\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - F\frac{\partial u}{\partial t}\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= 2\iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial z}\right) - F\frac{\partial u}{\partial t}\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= 2\iint_S \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\, dS - 2\iiint_\Omega F\frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz.$$

Datorită faptului că în baza ipotezei noastre $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0$, avem

$$\frac{dK_1}{dt} = -2\iiint_\Omega F\frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XXII.10)}$$

Folosindu-ne de cunoscuta inegalitate

$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2,$$

transcriem pe (XXII.10) sub forma

$$\frac{dK_1}{dt} \leqslant \iiint_\Omega F^2\,dx\,dy\,dz + \iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

sau întărind, încă, inegalitatea

$$\frac{dK_1}{dt} \leqslant \iiint_\Omega F^2\,dx\,dy\,dz + K_1.$$

Dacă punem,

$$\iiint_\Omega F^2\,dx\,dy\,dz = A(t),$$

atunci,

$$\frac{dK_1}{dt} - K_1 \leqslant A(t),$$

$$\frac{d(e^{-t}K_1)}{dt} \leqslant e^{-t}A(t). \qquad \text{(XXII.11)}$$

Prin urmare,

$$\left.\begin{aligned} e^{-t}K_1(t) &\leqslant K_1(0) + \int_0^t e^{-t_1}A(t_1)\,dt_1, \\ K_1(t) &\leqslant e^t K_1(0) + \int_0^t e^{t-t_1}A(t_1)\,dt_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXII.12)}$$

De aici, rezultă imediat că pentru $K_1(0) = 0$, oricare ar fi intervalul de variație finit dat pentru t, mărimea $K_1(t)$ poate fi făcută oricît de mică de îndată ce funcția $A(t)$ este suficient de mică.

Să observăm de asemenea că, punînd

$$K_0(t) = \iiint_\Omega u^2\,dx\,dy\,dz,$$

vom avea:

$$\frac{dK_0(t)}{dt} = 2\iiint_\Omega u\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz \leqslant K_0(t) + K_1(t),$$

adică

$$\frac{dK_0(t)}{dt} - K_0(t) \leqslant K_1(t). \qquad \text{(XXII.13)}$$

Din această inegalitate, la fel ca și mai sus, urmează că

$$K_0(t) \leqslant e^t K_0(0) + \int_0^t e^{t-t_1}K_1(t_1)\,dt_1. \qquad \text{(XXII.14)}$$

Pentru $K_0(0) = K_1(0) = 0$, odată cu $K_1(t)$ va fi mic și $K_0(t)$.

Din evaluările (XXII.12) și (XXII.14) obținute se pot deduce o serie de consecințe.

T e o r e m a 3. *Să presupunem că șirul de funcții u_n satisface ecuațiile*

$$\Delta u_n - \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = F_n$$

și condițiile

$$u_n\Big|_{t=0} = \frac{\partial u_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad \text{(XXII.15)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \qquad \text{(XXII.16)}$$

și că funcțiile F_n satisfac condiția

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left[\iiint_\Omega F_n^2\,dx\,dy\,dz\right] dt = 0.$$

Atunci, pentru toate valorile t, din intervalul închis

$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

au loc egalitățile :

$$\lim_{n \to \infty} K_0(t) = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} K_1(t) = 0.$$

Demonstrație. Întărind inegalitățile (XXII.12) și (XXII.14), obținem

$$K_1(t) \leqslant e^T \int_0^T A(t_1)\, dt_1, \qquad \text{(XXII.17)}$$

$$K_0(t) \leqslant e^T \int_0^T K_1(t_1)\, dt_1 \leqslant e^{2T} \cdot T \int_0^T A(t_1)\, dt_1; \qquad \text{(XXII.18)}$$

din (XXII.17) și (XXII.18) rezultă imediat teorema noastră.

Din teorema demonstrată nu rezultă că problema a fost corect pusă, decît dacă luăm drept măsură a abaterii celor două funcții abaterea medie. Dacă vom compara între ele două soluții ale ecuațiilor :

$$\Delta u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = F_1 \text{ și } \Delta u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = F_2, \qquad \text{(XXII.19)}$$

cu condițiile omogene (XXII.15) și (XXII.16) pentru care diferența $F_1 - F_2$ este suficient de mică, atunci, deși nu putem afirma că aceste soluții diferă, peste tot, foarte puțin una de alta, totuși diferența $u_1 - u_2$ va fi împreună cu derivatele sale de ordinul întîi, oricît de mică vrem noi în medie, oricare ar fi timpul t, adică

$$\int\int\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2\, dx\, dy\, dz < \varepsilon,$$

$$\int\int\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz < \varepsilon.$$

Să presupunem că ni se cere să comparăm între ele soluțiile celor două ecuații

$$\Delta u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = F_1, \quad \Delta u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = F_2 \qquad \text{(XXII.20)}$$

cu condițiile

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1; \quad u_2|_{t=0} = \varphi_2;$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{dt}\right|_{t=0} = \psi_1; \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_2;$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_S = f_1; \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_S = f_2;$$

în care φ_1, φ_2 admit derivate continue pînă la ordinul al doilea, iar ψ_1, ψ_2, f_1, f_2 admit derivate continue de ordinul întîi. Să presupunem că aceste funcții sînt apropiate una de alta, în sensul că au loc următoarele inegalități

$$|\varphi_1 - \varphi_2| < \delta, \quad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\right| < \delta, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_i \partial x_j}\right| < \delta;$$

$$|\psi_1 - \psi_2| < \delta, \quad \left|\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i}\right| < \delta; \; |f_1 - f_2| < \delta, \; \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_j} - \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right| < \delta;$$

$$|F_1 - F_2| < \delta$$

$$(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z).$$

Este ușor de văzut că reducînd aceste probleme la probleme cu condiții omogene, obținem din nou două ecuații de forma (XXII.20) ca membri drepți apropiați și, prin urmare, soluțiile lor vor fi apropiate în medie pentru orice valoare t din intervalul finit.

La fel ca și pentru ecuația căldurii este ușor de demonstrat unicitatea soluției ecuației (XXII.7), cu condițiile inițiale arbitrare (XXII.8). Într-adevăr, pentru aceasta este suficient să demonstrăm că ecuația omogenă cu condițiile omogene admite numai o soluție banală, identic nulă. Aceasta din urmă rezultă din faptul că, așa cum am văzut, integrala pătratului acestei soluții este nulă.

Însfîrșit, ca și în problemele precedente, chestiunea existenței soluției prezintă dificultăți importante care, așa cum se poate arăta, depășesc în parte chiar dificultățile corespunzătoare de la ecuația lui Laplace și de la ecuația căldurii. Putem evita aceste dificultăți introducînd noțiunea de soluții generalizate.

§ 4. Soluțiile generalizate ale ecuației undelor

Să facem în prealabil cîteva observații. Să considerăm funcția $u(x, y, z, t)$ de patru variabile independente — cele trei coordonate ale unui punct arbitrar dintr-un anumit domeniu Ω și t — de pătrat integrabil în raport cu x, y, z, oricare ar fi valoarea lui t dintr-un anumit interval. Vom spune că funcția $u(x, y, z, t)$ este continuă în medie în raport cu variabila t în punctul t_0, dacă oricare ar fi numărul pozitiv ε, mărimea

$$\left\{\iiint\limits_{\Omega} [u(x, y, z, t_0+h)-u(x, y, z, t)]^2\, dx\, dy\, dz\right\}^{1/2}$$

poate fi făcută oricît de mică vrem noi pentru un $|h|$ suficient de mic. O funcție, continuă în medie în fiecare punct al intervalului $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, o vom numi *continuă în medie pe acest interval*. Să introducem o notație prescurtată. Vom numi *norma funcției* u mărimea

$$\left[\iiint\limits_{\Omega} u^2(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\right]^{1/2}$$

și o vom nota cu $\|u\|$, oricare ar fi funcția u de variabilele x, y, z, definită în domeniul Ω și de pătrat integrabil.

În baza inegalității lui Minkowski (v. mai departe § 6) avem

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Dacă $\|u\| = 0$, atunci funcția u, așa cum s-a arătat în § 7 al lecției VI, se anulează aproape peste tot în Ω. Pentru orice constantă arbitrară a are loc egalitatea evidentă.

$$\|au\| = |a|\,\|u\|.$$

Aceste proprietăți ale normei vor fi necesare în cele ce urmează. Folosindu-ne de noile notații, definirea continuității în medie poate fi reformulată astfel: afirmăm că funcția $u(x, y, z, t)$ este continuă în medie în punctul t, dacă, oricare ar fi numărul pozitiv ε, putem găsi un număr pozitiv $\eta(\varepsilon)$, astfel încît

$$\|u(t+h) - u(t)\| < \varepsilon,$$

de îndată ce $|h| < \eta(\varepsilon)$ (pentru prescurtare am lăsat la o parte în funcția u, argumentele x, y, z).

Vom afirma că șirul de funcții

$$u_n(x, y, z, t) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

este uniform convergent în medie către funcția $u_0(x, y, z, t)$ dacă inegalitatea

$$\|u_n - u_0\| = \left\{\iiint\limits_{\Omega} [u_n(x, y, z, t) - u_0(x, y, z, t)]^2\, dx\, dy\, dz\right\}^{1/2} < \varepsilon$$

este valabilă pentru orice t din intervalul dat, de îndată ce

$$n \geqslant N(\varepsilon).$$

Este valabilă următoarea teoremă,

Teorema 4. *Limita șirului uniform convergent în medie de funcții* $u_n(x, y, z, t)$, $n = 1, 2, \ldots$, *continue în medie, este o funcție continuă în medie.*

Vom demonstra această teoremă prin aceeași metodă prin care se demonstrează aceasta în Analiza matematică pentru funcțiile continue obișnuite. Fie ε un număr pozitiv dat. Să alegem N atît de mare, încît să aibă loc inegalitatea

$$\|u_n(t) - u_0(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{(XXII.21)}$$

pentru orice t din intervalul dat, de îndată ce $n \geqslant N$. Conform enunțului, funcția $u_n(x, y, z, t)$ este continuă în medie în orice punct t_0. Prin urmare, pentru $|h| < \eta$

$$\|u_n(t+h) - u_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(XXII.22)}$$

Din (XXII.21) și (XXII.22), folosindu-ne de inegalitatea lui Minkowski, obținem

$$\|u_0(t+h) - u_0(t)\| \leqslant \|u_0(t+h) - u_n(t+h)\| + \|u_0(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t+h) - u_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Prin urmare, cu valoarea indicată a lui h

$$\|u_0(t+h) - u_0(t)\| < \varepsilon.$$

Teorema este demonstrată.

Vom spune că funcția u, de pătrat integrabil în domeniul arbitrar Ω, este limita în medie a șirului u_n, dacă

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_{\Omega}(u_n-u)^2\,dx\,dy\,dz=0.$$

Vom numi soluție generalizată a ecuației (XXII.7) *cu condițiile* (XXII.15) *și* (XXII.16) *o funcție u care este limita în medie a șirului de funcții u_n satisfăcînd ecuațiile*

$$\Delta u_n-\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}=F_n$$

și condițiile (XXII.15) *și* (XXII.16). *în care șirul F_n converge în medie către F.*

Din evaluările teoremei 3 se deduce un rezultat important dacă șirul $F_n(x, y, z, t)$ converge în medie uniform în raport cu t, atunci și șirul de soluții $u(x, y, z, t)$ converge în medie, uniform în raport cu t.

La fel cum am făcut mai sus (v. de exemplu lecția XVIII) vom spune că două funcții $u^{(1)}$ și $u^{(2)}$ sînt echivalente dacă

$$\iiint_{\Omega}(u^{(1)}-u^{(2)})^2\,dx\,dy\,dz=0^1).$$

Soluția generalizată este unică, întrucît șirul u_n nu poate avea două limite în medie, deoarece am avea pentru aceste limite diferite $u^{(1)}$ și $u^{(2)}$ inegalitatea

$$\iiint_{\Omega}(u^{(1)}-u^{(2)})^2\,dx\,dy\,dz\leqslant$$

$$\leqslant\iiint_{\Omega}[(u^{(1)}-u_n)+(u_n-u^{(2)})]^2\,dx\,dy\,dz\leqslant$$

$$\leqslant 2\iiint_{\Omega}(u^{(1)}-u_n)^2\,dx\,dy\,dz+2\iiint_{\Omega}(u^{(2)}-u_n)^2\,dx\,dy\,dz\leqslant 4\varepsilon$$

iar $u^{(1)}$ și $u^{(2)}$ ar fi echivalente.

[1]) Așa cum am văzut mai sus (teorema 21, lecției VI) acestea pot diferi una de alta numai pe o mulțime de măsuri nule.

Existența soluției generalizate poate fi stabilită folosind o teoremă din teoria funcțiilor de variabilă reală, care poartă numele de teorema lui Riesz-Fischer și care se enunță astfel:

Dacă șirul de funcții $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de pătrat integrabil se bucură de proprietatea că pentru m și n suficient de mari

$$\iiint_{\Omega}(u_m-u_n)^2\,dx\,dy\,dz<\varepsilon,$$

atunci există limita în medie a acestui șir, adică există o funcție u, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_{\Omega}(u_n-u)^2\,dx\,dy\,dz=0.$$

Demonstrația acestei teoreme o vom face la sfîrșitul lecției.

Să arătăm în ce mod poate fi utilizată teorema lui Riesz-Fischer pentru demonstrația existenței soluțiilor generalizate ale ecuației undelor. Să presupunem că $u_n(x, y, z, t)$ sînt soluțiile ecuației (XXII.7) care satisfac condițiile (XXII.15) și (XXII.16). Să considerăm expresia

$$\|u_m(t)-u_n(t)\|.$$

Funcția $v_{m,n}\equiv u_m(t)-u_n(t)$ reprezintă o soluție a ecuației

$$\Delta v_{m,n}-\frac{\partial^2 v_{m,n}}{\partial t^2}=F_m-F_n.$$

În baza convergenței uniforme în medie a lui F_n către funcția F, vom avea $\|F_m(t)-F_n(t)\|<\eta$ pentru m și n suficient de mari și oricare ar fi $\eta>0$. Așa cum am văzut, de aici rezultă că $\|v_{m,n}\|<\varepsilon$, în care ε este un număr pozitiv arbitrar. Conform teoremei lui Riesz-Fischer, șirul $u_n(x, y, z, t)$ converge în medie uniform către o anumită funcție limită care, în baza teoremei 4, va fi continuă în medie, ceea ce trebuia demonstrat.

Din exemplele pe care le-am analizat în paragrafele precedente a reeșit că soluțiile generalizate ale ecuației lui Laplace, Poisson și a ecuației căldurii, au derivate de ordinul întîi continue. Ne vom convinge în curînd că această împrejurare nu este întîmplătoare.

În contradicție cu aceste probleme, soluțiile generalizate ale ecuației undelor nu trebuie să fie continue împreună cu pri-

mele lor derivate. Stabilirea condițiilor în care aceasta are loc ne-ar răpi mult timp așa că nu ne vom ocupa de aceasta.

Pentru a încheia acest paragraf vom prezenta încă un exemplu simplu.

Exemplul 2. Să luăm drept domeniu Ω sfera de rază egală cu 1. Fie $\psi(\xi)$ o funcție arbitrară, definită în intervalul $-\infty < \xi < +\infty$. Fie funcția

$$u_0 = \frac{\psi(t+r) - \psi(t-r)}{r}, \qquad \text{(XXII.23)}$$

unde r este distanța de la un punct variabil pînă la originea coordonatelor. Pentru $r \neq 0$ funcția u_0 are tot atîtea derivate cîte are și funcția ψ. Pentru $r = 0$ numărul derivatelor pe care le posedă u_0 este cu o unitate mai mic decît numărul derivatelor lui ψ. Aceasta nu este greu de stabilit prin derivare pentru derivatele în raport cu coordonatele spațiale x, y, z, iar pentru derivatele în raport cu timpul această împrejurare este evidentă direct.

Intr-adevăr,

$$\frac{\partial^k u_0}{\partial t^k} = \frac{1}{r}\left[\psi^{(k)}(t+r) - \psi^{(k)}(t-r)\right].$$

Această funcție are o semnificație bine determinată pentru $r = 0$ numai în cazul cînd există.

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}\left[\psi^{(k)}(t+r) - \psi^{(k)}(t-r)\right] = 2\psi^{(k+1)}(t).$$

Prin urmare, pentru ca să existe derivata continuă $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ pentru $r = 0$, este necesar (și suficient) să existe derivata continuă $\psi^{(k+1)}$. Prin derivare ne convingem ușor că u_0 este o soluție a ecuației

$$\Delta u_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0,$$

dacă ψ admite derivate continue de ordinul al treilea. Să presupunem acum că funcția ψ din formula (XXII.23) este derivabilă o singură dată sau nu are de loc derivată. Putem stabili atunci că u_0 rămîne totuși soluție generalizată.

Către această funcție converge șirul de soluții

$$u_n = \frac{\psi_n(r+t) - \psi_n(r-t)}{r},$$

dacă șirul de funcții de trei ori derivabile și continue ψ_n converge către ψ.

Dacă într-un anumit punct $\xi = t_0$, funcția $\psi(\xi)$ nu are derivată, u_0 va fi discontinuă în punctul $r=0$ și $t=t_0$. O funcție u, care satisface condițiile

$$u|_S = u_0|_S, \qquad u|_{t=0} = u_0|_{t=0}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}$$

și ecuația

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

în general nu există.

Într-adevăr, dacă ar exista o asemenea soluție, atunci, conform proprietății dependenței continue a soluției de datele inițiale, șirul u_n ar trebui să tindă către această soluție, însă aceasta este imposibil deoarece șirul converge către funcția u_0.

Există încă un alt mod de a aborda soluțiile generalizate, care ne permit să le definim direct fără a recurge la trecerea la limită.

Dacă u_n este o soluție a ecuației

$$Lu_n = F_n,$$

iar ψ este o funcție cu totul arbitrară, avînd derivate continue pînă la ordinul al doilea și diferită de zero numai într-o anumită porțiune interioară σ a domeniului Ω, atunci

$$\iiint_{\Omega} (\psi F_n - u_n M\psi)\, d\Omega = 0.$$

Termenii din afara semnului integral dispar datorită faptului că ψ, cum și derivatele sale se anulează în exteriorul lui σ.

În cele ce urmează este necesară încă o inegalitate importantă care poartă numele de *inegalitatea lui Buniakovsky*.

Fie φ_1 şi φ_2 două funcţii de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definite pe mulţimea deschisă Ω. Dacă integralele

$$\int_\Omega \varphi_1^2\, dv \quad \text{şi} \quad \int_\Omega \varphi_2^2\, dv$$

există, atunci există şi integrala

$$\int_\Omega \varphi_1 \varphi_2\, dv,$$

fiind valabilă inegalitatea

$$\left(\int_\Omega \varphi_1 \varphi_2\, dv\right)^2 \leqslant \left(\int_\Omega \varphi_1^2\, dv\right)\left(\int_\Omega \varphi_2^2\, dv\right).$$

Această inegalitate o vom demonstra mai tîrziu. Folosind inegalităţile lui Minkovski şi Buniakovsky, obţinem

$$\left|\iiint_\Omega (\psi F - uM\psi)\, d\Omega\right| = \left|\iiint_\Omega [\psi(F - F_n) - (u - u_n) M\psi]\, d\Omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\iiint_\Omega \psi^2 d\Omega \iiint_\Omega (F - F_n)^2\, d\Omega} +$$

$$+ \sqrt{\iiint_\Omega (u - u_n)^2\, d\Omega \iiint_\Omega (M\psi)^2\, d\Omega} \leqslant \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că oricare ar fi soluţia generalizată şi oricare ar fi ψ, este valabilă egalitatea integrală

$$\iiint_\Omega u\, M\psi\, d\Omega = \iiint_\Omega \psi F\, d\Omega. \qquad \text{(XXII.24)}$$

Această egalitate poate înlocui în întregime ecuaţia diferenţială; vom denumi soluţie generalizată a ecuaţiei

$$Lu = F$$

orice funcţie care satisface relaţia integrală (XXII.24), oricare ar fi funcţia ψ care are derivate continue pînă la ordinul al doilea şi care este diferită de zero numai într-o anumită porţiune interioară σ a domeniului Ω.

Dacă ne amintim demonstraţia existenţei soluţiei, pentru a cărei obţinere am utilizat metoda lui Kirchhoff, ne convingem că formula (XXII.24) a fost la noi o verigă importantă în demonstraţie. Am demonstrat astfel numai existenţa soluţiei generalizate. Din (XXII.24), presupunînd că u are derivate şi integrînd prin părţi, deducem următoarea formulă

$$\iiint_\Omega \psi\,(Lu - F)\, d\Omega = 0, \qquad \text{(XXII.25)}$$

de aici tragem concluzia, că u este o soluţie a ecuaţiei $Lu = F$. Această ultimă etapă poate fi realizată numai dacă u este o soluţie a problemei concepută în sensul clasic al cuvîntului.

§ 5. Proprietatea soluţiilor generalizate ale ecuaţiilor omogene

Este valabilă următoarea teoremă.

Teorema 5. Pentru ecuaţia lui Laplace, ecuaţia $\triangle u + \lambda u = 0$ şi ecuaţia omogenă a căldurii, orice soluţie generalizată în sensul relaţiei integrale (XXII.24) este în mod obligatoriu derivabilă pînă la orice ordin şi este o soluţie în sensul obişnuit.

Prin aceasta, ecuaţiile de tip eliptic şi de tip parabolic diferă mult de ecuaţiile de tip hiperbolic, pentru care această proprietate nu are loc.

Demonstraţia acestei teoreme o vom face mai întîi pentru ecuaţia căldurii.

Să ne ocupăm la început de construirea cîtorva funcţii ajutătoare. Vom defini funcţia $\Psi(\xi)$ cu ajutorul formulelor

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant \frac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{1 + e^{\frac{-\xi + \frac{1}{2}}{\left(\xi - \frac{1}{4}\right)(1 - \xi)}}}, & \frac{1}{4} \leqslant \xi \leqslant 1, \\ 1, & \xi \geqslant 1. \end{cases}$$

Funcţia $\Psi(\xi)$ se bucură de anumite proprietăţi evidente:

a) Ea este continuă în intervalul $0 \leqslant \xi \leqslant \infty$. Într-adevăr, fracţia $\dfrac{-\xi + \frac{1}{2}}{\left(\xi - \frac{1}{4}\right)(1 - \xi)}$ are drept limită pe $+\infty$ pentru $\xi \to \frac{1}{4} + 0$ şi pe $-\infty$ pentru

$\xi \to 1 - 0$. Prin urmare,

$$\lim_{\xi \to \frac{1}{4}} e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}} = \infty, \qquad \lim_{\xi \to 1} e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}} = 0$$

de unde rezultă continuitatea lui Ψ.

b) Funcţia $\Psi(\xi)$ admite derivatele continue de-orice ordin. Pentru a stabili aceasta, este suficient să ne convingem de faptul că valorile limită ale derivatelor de orice ordin ale lui $\Psi(\xi)$ pentru $\xi \to \frac{1}{4}$, sau $\xi \to 1$ sînt nule. Obţinem

$$\Psi'(\xi) = \frac{-e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}}{\left[1+e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}\right]^2} \frac{d}{d\xi} \frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)} =$$

$$= \frac{\frac{d}{d\xi} \frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}{\left(e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)\left(e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)}.$$

Expresia $e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}$ tinde către infinit pentru $\xi \to \frac{1}{4}$ mai repede decît orice funcţie raţională de ξ, iar expresia $e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}$ tinde şi ea către infinit pentru $\xi \to 1$, mai repede decît orice funcţie raţională de ξ. Prin urmare,

$$\Psi'\left(\frac{1}{4}+0\right) = 0; \quad \Psi'(1-0) = 0. \tag{XXII.26}$$

Orice derivată $\Psi^{m}(\xi)$ va admite reprezentarea:

$$\Psi^{(m)}(\xi) = \sum_{\substack{p \geqslant 1 \\ q \geqslant 1}} \frac{R_{m,p,q}(\xi)}{\left(e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)^p \left(e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)^q}, \tag{XXII.27}$$

unde $R_{m,p,q}(\xi)$ sînt funcţii raţionale.

Această formulă se demonstrează imediat prin inducţie completă. Din formula (XXII.27) rezultă

$$\Psi^{(m)}\left(\frac{1}{4}+0\right) = 0, \quad \Psi^{(m)}(1-0) = 0, \tag{XXII.28}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să luăm în consideraţie acum funcţia

$$w_n(x-x_0, y-y_0, z-z_0, t_0-t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t_0 \leqslant t, \\ \dfrac{-1}{8\pi^{3/2}(t_0-t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}} \Psi[n^2(r^2+t_0-t)], & t < t_0, \end{cases}$$

unde $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, $0 \leqslant r < +\infty$.

Să semnalăm cîteva proprietăţi ale funcţiei w_n.

a) Este evident că

$$w_n(x-x_0, y-y_0, z-z_0, t_0-t) =$$

$$= n^3 w_1[n(x-x_0), n(y-y_0), n(z-z_0), n^2(t_0-t)]. \tag{XXII.29}$$

b) Să formăm expresia

$$\Delta w_n + \frac{\partial w_n}{\partial t} = \Phi_n(x-x_0, y-y_0, z-z_0, t_0-t).$$

Atunci, din formula (XXII.29) rezultă

$$\Phi_n(x-x_0, y-y_0, z-z_0, t_0-t) =$$

$$= n^5 \Phi_1[n(x-x_0), n(y-y_0), n(z-z_0), n^2(t_0-t)]. \tag{XXII.30}$$

c) Funcţia Φ_n este diferită de zero numai în domeniul D_n

$$\frac{1}{4n^2} \leqslant r^2 + t_0 - t \leqslant \frac{1}{n^2}; \quad t < t_0,$$

care se strînge în jurul punctului x_0, y_0, z_0, pentru $n \to \infty$. Într-adevăr, în domeniul în care $\Psi[n^2(r^2+t_0-t)]$ devine egal cu unitatea, adică pentru $r^2 + (t_0 - t) \geqslant$

$\geqslant \frac{1}{n^2}$, avem $w_n = -v$, unde v este o soluție particulară a ecuației $\Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (v. lecția VIII). Înseamnă că

$$\Delta w_n + \frac{\partial w_n}{\partial t} = 0; \quad r^2 + t_0 - t \geqslant \frac{1}{n^2}.$$

Anularea lui Φ_n pentru $r^2 + t_0 - t \leqslant \frac{1}{4n^2}$ este evidentă.

d) Este valabilă formula

$$\iiint\limits_{D_n} \Phi_n \, dx \, dy \, dz \, dt = \int\limits_{t_0 - \frac{1}{n^2}}^{t_0} \left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n \, dx \, dy \, dz \right] dt = 1. \quad \text{(XXII.31}$$

Într-adevăr, în baza formulei lui Green (XXI.4), avem

$$\int\limits_{t_0 - \frac{1}{n^2}}^{t_0} \left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n \, dx \, dy \, dz \right] dt = \int\limits_{t_0 - \frac{1}{n^2}}^{t_0} \left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\Delta w_n + \frac{\partial w_n}{\partial t} \right) dx \, dy \, dz \right] dt =$$

$$= \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (w_n) \Big|_{t_0 - \frac{1}{n^2}}^{t_0} dx \, dy \, dz = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v \Big|_{t = t_0 - \frac{1}{n^2}} dx \, dy \, dz,$$

unde v este soluția fundamentală a ecuației căldurii determinată în lecția VIII. Ultima integrală, așa cum s-a arătat în lema 2 a lecției amintite, este egală cu unitatea, ceea ce demonstrează formula (XXII.31).

e) Fie $f(x, y, z, t)$ o funcție continuă arbitrară în domeniul Ω al celor patru variabile x, y, z, t.

Ne vom alege un domeniu Ω_n al valorilor x_0, y_0, z_0, t_0, astfel încît pentru punctele x_0, y_0, z_0, t_0, din Ω_n, domeniul D_n, să se găsească în întregime în interiorul lui Ω.

Să construim în Ω_n funcția

$$f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \Phi_n (x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0) f(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz \, dt.$$

Atunci, șirul $f_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$ converge către funcția $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$, convergența fiind uniformă în orice domeniu interior în raport cu Ω.

Să reprezentăm funcția f sub forma

$$f(x, y, z, t) = f(x_0, y_0, z_0, t_0) + \eta_n.$$

Este evident că în baza continuității lui f vom avea în domeniul D_n, pentru un n suficient de mare

$$|\eta| < \varepsilon.$$

Să notăm

$$\int\limits_{-\infty}^{t_0} \left(\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1| \, dx \, dy \, dz \right) dt = M.$$

În baza formulei (XXII.30),

$$\int\limits_{-\infty}^{t_0} \left(\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_n| \, dx \, dy \, dz \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{t_0} \left(\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1| \, dx \, dy \, dz \right) dt = M.$$

Vom avea

$$f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) = \iiint\limits_{\Omega} \Phi_n f \, dx \, dy \, dz \, dt =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \Phi_n f(x_0, y_0, z_0, t_0) \, dx \, dy \, dz \, dt + \iiint\limits_{\Omega} \Phi_n \eta \, dx \, dy \, dz \, dt =$$

$$= f(x_0, y_0, z_0, t_0) + \iiint\limits_{D_n} \Phi_n \eta \, dx \, dy \, dz \, dt,$$

de unde

$$|f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) - f(x_0, y_0, z_0, t_0)| \leqslant \varepsilon M,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

f) Funcția f_n, pe care am construit-o, va fi derivabilă de o infinitate de ori. Această proprietate rezultă din faptul că Φ_n este derivabilă de o infinitate de ori.

După aceste observații, putem demonstra teorema noastră.

Fie u o soluție arbitrară a ecuației căldurii. Să calculăm $u_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Vom constata că, pentru orice n funcțiile $u_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$ vor fi egale între ele și nu vor depinde de n.

Într-adevăr,

$$u_n(x_0, y_0, z_0, t_0) - u_{n+p}(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} u(x, y, z, t) \, (\Phi_n - \Phi_{n+p}) \, dx \, dy \, dz \, dt =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} u(x, y, z, t) \left[\Delta (w_n - w_{n+p}) + \frac{\partial}{\partial t} (w_n - w_{n+p}) \right] dx \, dy \, dz \, dt.$$

Însă $w_n - w_{n+p} = \psi$ este diferit de zero numai în domeniul

$$\frac{1}{4(n+p)^2} \leqslant r^2 + t_0 - t \leqslant \frac{1}{n^2},$$

deoarece pentru $r^2 + t_0 - t \geqslant \frac{1}{n^2}$ funcția w_n coincide cu w_{n+p}.

Funcţia ψ satisface toate condiţiile pentru care este aplicabilă formula XXII.24). Este evident că

$$M = \Delta + \frac{\partial}{\partial t}, \quad L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t},$$

de unde, observînd că ecuaţia noastră are forma : $Lu = 0$, adică $F = 0$, avem

$$u_n - u_{n+p} = \int\int_\Omega\int\int \psi F \, dx \, dy \, dz \, dt = 0.$$

De aici, rezultă că $u = u_n$, însă u_n are o infinitate de derivate. Prin urmare, u este de asemenea derivabil de un număr convenabil de ori. Teorema este demonstrată.

Să presupunem acum că funcţia u satisface ecuaţia

$$\Delta u + \lambda u = 0.$$

Să punem

$$v = e^{-\lambda t} u.$$

Atunci,

$$\Delta v = e^{-\lambda t} \Delta u = -\lambda e^{-\lambda t} u.$$

Prin urmare,

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Funcţia v va fi derivabilă de un număr convenabil de ori, în baza celor demonstrate anterior. Prin urmare, de aceeaşi proprietate se va bucura şi funcţia u, ceea ce trebuia demonstrat.

Se poate demonstra că toate soluţiile ecuaţiei $\Delta u + \lambda u = 0$ vor fi chiar analitice în întregul domeniu Ω, spre deosebire de soluţiile ecuaţiei căldurii pentru care această afirmaţie nu are loc.

§ 6. Inegalităţile lui Buniakovsky şi Minkowski

Fie $\rho(P)$ o funcţie nenegativă, pe care o vom numi *pondere*.

Fie două funcţii $\varphi(P)$ şi $\psi(P)$, definite în domeniul Ω, avînd pătratul modulului integrabil, cu ponderea $\rho(P)$, adică

$$\left.\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\, dP < \infty, \\ \int_\Omega |\psi(P)|^2 \rho(P)\, dP < \infty. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXII.32)}$$

Atunci este valabilă următoarea inegalitate

$$\left|\int_\Omega \varphi(P)\, \psi(P)\, \rho(P)\, dP\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\, dP \int_\Omega |\psi(P)|^2 \rho(P)\, dP. \qquad \text{(XXII.33)}$$

Este clar că pentru demonstraţie va fi suficient să ne limităm la cazul în care $\psi(P)$ şi $\varphi(P)$ sînt funcţii reale nenegative, deoarece

$$\left|\int_\Omega \varphi(P)\, \psi(P)\, \rho(P)\, dP\right| \leqslant \int_\Omega |\varphi(P)|\, |\psi(P)|\, \rho(P)\, dP. \qquad \text{(XXII.34)}$$

Oricare ar fi funcţiile nenegative φ şi ψ, pentru ele are loc inegalitatea

$$\varphi\psi \leqslant \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\psi^2.$$

Prin urmare, integrala

$$\int_\Omega \varphi(P)\, \psi(P)\, \rho(P)\, dP$$

are sens.

Să considerăm de asemenea integrala

$$\int_\Omega (\varphi - \lambda\psi)^2 \rho\, dP = \int_\Omega \varphi^2\rho\, dP - 2\lambda \int_\Omega \varphi\psi\rho\, dP + \lambda^2 \int_\Omega \psi^2\rho\, dP =$$
$$= a\lambda^2 - 2b\lambda + c. \qquad \text{(XXII.35)}$$

care şi ea are sens.

Parabola

$$y = a\lambda^2 - 2b\lambda + c$$

din planul variabilelor y şi λ nu poate avea nici un punct de desubutul axei λ, întrucît mărimea (XXII.35) este mai mare sau cel mult egală cu zero. Aceasta înseamnă că ecuaţia

$$a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$$

nu poate avea rădăcini reale şi distincte, iar o singură rădăcină dublă poate exista la această ecuaţie numai atunci cînd există un λ_0, astfel încît

$$\int_\Omega (\varphi - \lambda_0 \psi)^2 \rho\, dP = 0,$$

adică, atunci cînd expresia $(\varphi - \lambda_0\psi)\,\rho$ este echivalentă cu zero, adică diferită de zero numai pe o mulțime de măsură nulă. În cazul cînd funcția pondere $\rho(P)$ se anulează numai pe o mulțime de măsură nulă, aceasta înseamnă că expresia $\varphi - \lambda_0\psi$ este echivalentă cu zero.

Prin urmare

$$b^2 \leqslant ac,$$

semnul egalității putînd avea loc numai în cazul cînd φ și ψ sînt proporționale. Prin acestea este demonstrată inegalitatea lui Buniakovsky (XXII.33).

Din inegalitatea lui Buniakovsky rezultă în mod evident pentru orice φ și ψ, integrabile împreună cu pătratele lor și avînd ponderea ρ, inegalitatea

$$\left|\int_\Omega (\varphi^2 + 2\varphi\psi + \psi^2)\,\rho\,dP\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |\varphi|^2 \rho\,dP + \int_\Omega |\psi|^2 \rho\,dP + 2\sqrt{\int_\Omega |\psi|^2 \rho\,dP \int_\Omega |\psi|^2 \rho\,dP} =$$

$$= \left(\sqrt{\int_\Omega |\varphi|^2 \rho\,dP} + \sqrt{\int_\Omega |\psi|^2 \rho\,dP}\right)^2,$$

sau

$$\sqrt{\left|\int_\Omega (\varphi + \psi)^2 \rho\,dP\right|} \leqslant \sqrt{\int_\Omega |\varphi|^2 \rho\,dP} + \sqrt{\int_\Omega |\psi|^2 \rho\,dP} \quad \text{(XXII.36)}$$

Inegalitatea (XXII.36) demonstrată de noi, poartă numele de inegalitatea lui Minkovski.

Întocmai ca în demonstrația inegalității lui Buniakovsky, membrul stîng are sens, dacă are sens membrul drept.

§ 7. Teorema lui Riesz-Fischer

Teorema lui Riesz-Fischer. *Fie șirul de funcții*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots,$$

de pătrat integrabil în domeniul mărginit Ω. Să presupunem că pentru orice ε putem găsi un $N(\varepsilon)$, astfel încît

$$\int_\Omega (\varphi_k - \varphi_s)^2\,d\Omega < \varepsilon, \text{ dacă } k > N(\varepsilon),\ s > N(\varepsilon). \quad \text{(XXII.37)}$$

Atunci există o funcție φ_0 de pătrat integrabil în Ω, astfel încît

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\varphi_k - \varphi_0)^2\,d\Omega = 0. \quad \text{(XXII.38)}$$

Este evident că o asemenea funcție este unică pînă la o echivalență, deoarece, presupunînd existența a două asemenea funcții limită φ_0 și φ_*, vom avea, în baza inegalității lui Minkowski,

$$\sqrt{\int_\Omega (\varphi_0 - \varphi_*)^2\,d\Omega} \leqslant \sqrt{\int_\Omega (\varphi_0 - \varphi_n)^2\,d\Omega} + \sqrt{\int_\Omega (\varphi_n - \varphi_*)^2\,d\Omega} < \varepsilon$$

pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic, de unde rezultă.

$$\int_\Omega (\varphi_0 - \varphi_*)^2\,d\Omega = 0.$$

Vom zice că φ_0 este limita în sensul convergenței în medie pătratică pentru șirul φ_k. Să demonstrăm această teoremă.

Vom stabili înainte de toate că șirul φ_k converge în medie, deci că există o funcție sumabilă φ_0 astfel încît

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\varphi_0 - \varphi_k)^2\,d\Omega = 0\ ^1).$$

În acest scop, observăm că, în baza inegalității lui Buniakovsky, avem

$$\int_\Omega |\varphi_m - \varphi_p|\,d\Omega = \int_\Omega |\varphi_m - \varphi_p| \cdot 1\,d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_\Omega |\varphi_m - \varphi_p|^2\,d\Omega\right]^{1/2} \left[\int_\Omega 1\,d\Omega\right]^{1/2}$$

și, prin urmare,

$$\int_\Omega |\varphi_m - \varphi_p|\,d\Omega < \eta,$$

[1]) Autorul folosește aici acest termen în loc de cel de convergență în medie definită anterior, pentru a putea introduce definiția a convergenței în medie, în care apare $|\varphi_0 - \varphi_k|$. În restul textului se revine la prima semnificație. (N. Red. E.T.).

dacă $m > N(\eta)$, $p > N(\eta)$. Aplicînd teorema 23 din lecția VI, ne convingem de existența funcției sumabile φ_0, limita în medie a șirului φ_k.

Din metoda demonstrației rezultă aici că există un subșir φ_{ki} al șirului φ_k care converge către φ_0 aproape peste tot și aceasta în mod uniform pe mulțimile închise F_δ, pe care sînt continue toate funcțiile. Mulțimile F_δ pot fi considerate ca avînd măsura oricît de apropiată de cea a lui Ω. Avem

$$\int_{F_\delta} \varphi_0^2 \, d\Omega = \lim_{i \to \infty} \int_{F_\delta} \varphi_{ki}^2 \, d\Omega \leqslant A < \infty,$$

de unde rezultă

$$\int_\Omega \varphi_0^2 \, d\Omega \leqslant A,$$

integrala din membrul stîng existînd. Nu este greu să vedem că mărimea

$$\int_\Omega (\varphi_0 - \varphi_{ki})^2 \, d\Omega$$

poate fi făcută oricît de mică vrem noi pentru un i suficient de mare. Să notăm pentru prescurtare $\psi_i = \varphi_{ki}$. Oricare ar fi mulțimea închisă F_δ. și numărul pozitiv dat ε, pentru un l suficient de mare depinzînd în general de F_δ, obținem

$$\int_{F_\delta} (\varphi_0 - \psi_i)^2 \, d\Omega = \int_{F_\delta} [(\psi_l - \psi_i) + (\varphi_0 - \psi_l)]^2 \, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{F_\delta} (\psi_l - \psi_i)^2 \, d\Omega + 2 \int_{F_\delta} (\varphi_0 - \psi_l)^2 \, d\Omega \leqslant 2 \int_\Omega (\psi_l - \psi_i)^2 \, d\Omega + \varepsilon.$$

În baza condițiilor teoremei, avem pentru l și i suficient de mari

$$\int_\Omega (\psi_l - \psi_i)^2 \, d\Omega \leqslant \varepsilon.$$

De aici,

$$\int_{F_\delta} (\varphi_0 - \psi_i)^2 \, d\Omega \leqslant 3\varepsilon$$

și, prin urmare,

$$\int_\Omega (\varphi_0 - \psi_i)^2 \, d\Omega \leqslant 3\varepsilon.$$

Să demonstrăm acum că φ_0 este limita în medie pătratică și pentru șirul inițial φ_k.

Pentru $s, k_i > N(\varepsilon)$, avem

$$\int_\Omega (\varphi_0 - \varphi_s)^2 \, d\Omega \leqslant 2 \int_\Omega (\varphi_0 - \psi_i)^2 \, d\Omega + 2 \int_\Omega (\psi_i - \varphi_s)^2 \, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 6\varepsilon + 2\varepsilon = 8\varepsilon.$$

Teorema este demonstrată.

LECȚIA XXIII

METODA LUI FOURIER [1])

§ 1. Separarea variabilelor

Este comod să rezolvăm problemele la limită ale fizicii matematice pentru ecuațiile de tip parabolic și de tip hiperbolic cu ajutorul unei metode propuse de Fourier, pe care o vom numi metoda separării variabilelor.

Vom lămuri esența acestei metode pe baza unor exemple particulare. Condus de considerațiile expuse în lecțiile precedente, cititorului nu-i va fi greu să înțeleagă, dintr-o dată, precum și în care cazuri metoda lui Fourier ne permite să determinăm o soluție a problemei. Să presupunem că se caută o soluție a ecuației

$$\Delta u = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{(XXIII.1)}$$

în domeniul Ω al spațiului x, y, z, mărginit de suprafața S, și pentru t satisfăcînd inegalitatea $0 \leqslant t \leqslant T$, cu condițiile

$$u|_S = 0, \qquad \text{(XXIII.2)}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z). \qquad \text{(XXIII.3)}$$

Să lăsăm deocamdată la o parte condiția (XXIII.3) și să căutăm soluțiile particulare ale ecuației (XXIII.1) care satisface condiția (XXIII. 2).

Este comod să căutăm aceste soluții sub forma produsului a două funcții

$$u = U(x, y, z)\ T(t). \qquad \text{(XXIII.4)}$$

[1]) În literatura română această metodă este numită și metoda lui Bernoulli. N. Red. E. T.).

Introducînd (XXIII.4) în (XXIII.1) și împărțind ambii membri cu u, vom avea

$$\frac{\Delta U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = \frac{1}{a}\frac{T'(t)}{T(t)}. \qquad \text{(XXIII.5)}$$

Variabilele x, y, z și t din ecuația (XXIII.5) sînt separate, membrul stîng nu depinde de t, iar membrul drept nu depinde de x, y, z. Egalitatea (XXIII.5) este posibilă numai cu condiția ca și membrul stîng și membrul drept să fie egali cu una și aceeași constantă $-\lambda$, de unde

$$\frac{\Delta U}{U} = -\lambda, \quad \frac{1}{a}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \qquad \text{(XXIII.6)}$$

sau

$$\Delta U + \lambda U = 0, \qquad \text{(XXIII.7)}$$

$$T(t) = Ce^{\lambda a t}. \qquad \text{(XXIII.8)}$$

Pentru ca soluția noastră să satisfacă condiția (XXIII.2), este necesar ca funcția $U(x, y, z)$ să satisfacă această condiție. Valorile lui λ pentru care ecuația (XXIII.7) admite o soluție care satisface condiția la limite (XXIII.2), se numesc *valorile proprii* ale problemei la limite pentru această ecuație cu condiția (XXIII.2 Nu orice valoare λ este o valoare proprie. Într-adevăr, trecînd în ecuația (XXIII.7) termenul care conține pe λU, în membrul drept și considerîndu-l ca un termen liber, obținem, aplicînd formula (XXI.7)

$$U_\lambda(P_0) = \frac{\lambda}{4\pi}\iiint_\Omega G(P, P_0)\ U(P)\ dP, \qquad \text{(XXIII.9)}$$

unde $G(P, P_0)$ este funcția lui Green pentru Laplace în domeniul Ω.

Ecuația (XXIII.9) este o ecuație integrală liniară și omogenă de speța doua, de tip Fredholm, cu nucleu care satisface condiția din § 7, lecția XVIII. Conform celei de-a patra teoreme a lui Fredholm, aceasta poate avea soluții diferite de zero, numai pentru anumite valori discrete λ. Să presupunem că aceste valori pentru λ, vor fi: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ și fie

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

soluțiile corespunzătoare ale ecuației (XXIII.9). Obținem atunci totalitatea soluțiilor particulare ale ecuației (XXIII.1) de tipul căutat

$$u_i = U_i e^{-\lambda_i a t}.$$

Să observăm că nucleul ecuației integrale (XXIII.9) este o funcție simetrică de coordonatele punctelor P și P_0.

Vom demonstra ceva mai departe, la teoria ecuațiilor integrale cu nucleu simetric, că există o infinitate de asemenea soluții și că oricare ar fi funcția φ, de pătrat integrabil, putem construi seria

$$u = \sum_{i=1} a_i U_i e^{-\lambda_i a t}, \qquad \text{(XXIII.10)}$$

care va satisface condițiile (XXIII.2) și (XXIII.3) și va reprezenta în medie soluția generalizată a ecuației (XXIII.1). Din teorema 5, lecția XXII, rezultă că orice soluție generalizată a ecuației (XXIII.1) este o soluție în sensul obișnuit al cuvîntului. Să indicăm deocamdată, fără demonstrație, cinci proprietăți importante ale sistemului de funcții $U_i(x, y, z)$ și ale numerelor λ_i:

1. Valorile λ_i sînt în număr infinit, fiind toate reale și pozitive. (În anumite alte probleme această proprietate se înlocuiește prin aceea că între ele există numai un număr finit de valori negative).

2. Toate funcțiile U_i pot fi considerate ortogonale și normate (ortonormale), adică

$$\iiint_{\Omega} U_i(x, y, z) U_j(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

3. Funcțiile U_i formează așa-numitul sistem complet, adică orice funcție continuă $\varphi(x, y, z)$ este reprezentată cu ajutorul seriei

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z), \qquad \text{(XXIII.11)}$$

convergentă în medie, în care numerele a_i sînt așa-numiții *coeficienți ai lui Fourier* pentru funcția φ. Dacă, afară de aceasta, φ satisface condiția

$$\varphi|_S = 0$$

și admite derivate continue de ordinul al doilea, peste tot, inclusiv frontiera, seria (XXIII.11) este uniform convergentă.

4. Afară de condiția de ortonormalitate scrisă mai sus, mai are loc și sistemul de egalități

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial U_i}{\partial y} \frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial z} \frac{\partial U_j}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \begin{cases} \lambda_i, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

5. Dacă funcția φ de două ori continuu derivabilă satisface condiția la limite (XXIII.2), atunci seria (XXIII.11) nu numai că converge uniform către φ, ci și seria obținută din aceasta, prin derivare termen cu termen, converge în medie către derivata corespunzătoare a funcției φ. Cu alte cuvinte, dacă punem

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i,$$

atunci, integrala

$$\iiint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial (\varphi - \varphi_N)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (\varphi - \varphi_N)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial (\varphi - \varphi_N)}{\partial z} \right]^2 \right\} dx\, dy\, dz$$

tinde către zero.

Ne punem acum problema determinării coeficienților lui Fourier pentru funcția $\varphi(x, y, z)$. Înmulțind ambii membri ai relației (XXIII.11) cu U_j și integrînd pe domeniul Ω, obținem cu ajutorul integrării seriei, termen cu termen

$$\iiint_{\Omega} U_j(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \iiint_{\Omega} U_i(x, y, z)\, U_j(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = a_j. \qquad \text{(XXIII.12)}$$

Formula (XXIII.12) ne dă pe a_j.

Pentru ca funcția reprezentată prin seria (XXIII.10) să satisfacă condiția (XXIII.3), este natural să cerem îndeplinirea egalității (XXIII.11). Dacă suma seriei (XXIII.10) este continuă pentru $t \geqslant 0$, atunci condițiile (XXIII.2) și (XXIII.3) vor fi satisfăcute pentru a_j, care sînt coeficienții lui Fourier ai funcției φ.

Nu este greu de stabilit că seria (XXIII.10) converge uniform și ne dă soluția generalizată a ecuației (XXIII.11). Într-adevăr, fie

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i(x, y, z).$$

Este evident că

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i(x, y, z)\, e^{-\lambda_i^2 a t}$$

ne dă soluția ecuației (XXIII.1) cu condițiile (XXIII.2) și

$$u_N|_{t=0} = \varphi_N.$$

Am arătat însă în lecția precedentă că în aceste condiții din convergența șirului φ_N rezultă că șirul u_N converge uniform către soluția generalizată u oricare ar fi intervalul finit de timp ceea ce trebuia demonstrat.

Exact la fel putem rezolva cu ajutorul metodei separării variabilelor problema integrării ecuației undelor. Să presupunem că ni se cere să găsim soluția ecuației

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(XXIII.13)}$$

cu condițiile inițiale

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z)\,; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z) \qquad \text{(XXIII.14)}$$

și cu condițiile la limită, de exemplu, de forma

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \qquad \text{(XXIII.15)}$$

unde S este suprafața, care mărginește volumul Ω în spațiul variabilelor x, y, z.

Soluțiile particulare ale acestei ecuații, care satisfac condițiile (XXIII.15) pot fi căutate ca și mai înainte sub forma

$$u = U(x, y, z)\, T(t). \qquad \text{(XXIII.16)}$$

Introducînd pe (XXIII.16) în (XXIII.13), obținem

$$T(t)\, \Delta U(x, y, z) = U(x, y, z)\, T''(t),$$

sau

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = -\lambda^2,$$

de unde

$$T'' + \lambda^2 T = 0, \qquad \text{(XXIII.17)}$$

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0. \qquad \text{(XXIII.18)}$$

Să căutăm din nou soluția ecuației (XXIII.18) cu condițiile (XXIII.15) cu ajutorul funcției lui Green. Această funcție $G_1(P, P_0)$ satisface în acest caz nu ecuația lui Laplace ci ecuația

$$\Delta G_1 = -\frac{4\pi}{D},$$

unde D este volumul domeniului Ω. Constanta $-\frac{4\pi}{D}$ este în cazul de față soluția problemei omogene adjuncte, adică

$$\Delta\left(-\frac{4\pi}{D}\right) = 0, \quad \frac{\partial\left(-\frac{4\pi}{D}\right)}{\partial n} = 0,$$

și este astfel aleasă, încît să asigure existența funcției lui Green. Aceasta rezultă din cercetarea problemei lui Neumann făcută mai sus [v. § 2, lecția XXI]. G_1 va fi astfel funcția generalizată a lui Green.

Vom căuta acea soluție U a ecuației

$$\Delta U = -\lambda^2 U,$$

care este ortogonală cu o constantă în domeniul Ω.

$$\iiint_\Omega \lambda^2\, U\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Vom rezolva ecuația (XXIII.18) considerînd pe $\lambda^2 U$ ca termen liber. Atunci, acea soluție a sa care este ea însăși ortogonală cu constanta, trebuie, în baza rezultatelor lecțiilor precedente, să aibă forma

$$U(P_0) = \lambda^2 \iiint_\Omega \frac{G_1(P P_0)}{4\pi}\, U(P)\, dP. \qquad \text{(XXIII.19)}$$

Am obținut din nou pentru funcțiile proprii ale problemei o ecuație integrală cu nucleu simetric.

Pentru această ecuație integrală sînt valabile toate afirmațiile noastre anterioare, afară de aceea dela 3, care se modifică acum astfel.

3a. Orice funcție $\varphi(P)$ care are derivate de ordinul al doilea continue peste tot, inclusiv frontiera domeniului Ω, este ortogonală cu constanta

$$\iiint_\Omega \frac{4\pi}{D}\, \varphi(P)\, dP = 0,$$

și satisface condițiile la limite, se dezvoltă într-o serie uniform convergentă după funcțiile proprii ale ecuației (XXIII.19).

Ecuația (XXIII.17) admite două soluții liniare independente

$$T_1 = \cos \lambda t,$$
$$T_2 = \sin \lambda t.$$

Dacă $U_i(x, y, z) = U_i(P)$ este o funcție proprie a ecuației (XXIII.19), iar λ_i este valoarea sa proprie, atunci soluțiile particulare căutate ale ecuației (XXIII.13) vor fi

$$U_i(x, y, z) \cos \lambda_i t, \qquad U_i(x, y, z) \sin \lambda_i t.$$

Vom căuta soluția u a problemei care ne interesează, sub forma seriei

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z) \cos \lambda_i t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i U_i(x, y, z) \sin \lambda_i t + c_0 + c_1 t \qquad \text{(XXIII.20)}$$

Dacă seria (XXIII.20) converge uniform în medie împreună cu derivata sa în raport cu timpul, atunci u și $\frac{\partial u}{\partial t}$ vor fi funcții de timp continue în medie. Aceasta a fost demonstrată în lecția XXII, teorema 4. Ne vom convinge în curînd că condiția convergenței uniforme în medie, împreună cu derivata în raport cu timpul, este îndeplinită.

Să punem condiția ca seria (XXIII.20) să satisfacă condițiile inițiale

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z) + c_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i U_i(x, y, z) + c_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIII.21)}$$

Dacă alegem coeficienții a_i și b_i astfel, încît să avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z) = \varphi_0(x, y, z) - c_0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i U_i(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) - c_1,$$

atunci condițiile inițiale (XXIII.14) vor fi satisfăcute în medie.

Presupunem din nou sistemul de funcții U_i ortogonal și normat

$$\iiint_{\Omega} U_i(P)\, U_j(P)\, dP = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

putem determina din nou toți coeficienții seriilor (XXIII.21) alegînd la început constantele c_0 și c_1 astfel, încît $\varphi_0 - c_0$ și $\varphi_1 - c_1$ să fie ortogonale cu constanta. Repetînd raționamentele anterioare, obținem

$$a_i = \iiint_{\Omega} \varphi_0 U_i\, dP, \qquad \lambda_i b_i = \iiint_{\Omega} \varphi_1 U_i\, dP.$$

Să trecem la demonstrarea convergenței în medie a seriei (XXIII.20).

Ca și mai înainte, ne convingem de la început că

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i \cos \lambda_i t + \sum_{i=1}^{N} b_i U_i \sin \lambda_i t$$

este o soluție a problemei cu condiții inițiale aproximative.

Să considerăm două sume parțiale finite u_n și u_m ale seriei (XXIII.20), în care să presupunem că $n > m$. Diferența acestor două sume parțiale

$$v_{nm} = u_n - u_m = \sum_{i=m+1}^{n} a_i U_i \cos \lambda_i t + \sum_{i=m+1}^{n} b_i U_i \sin \lambda_i t$$

satisface ecuația

$$\Delta v_{nm} - \frac{\partial^2 v_{nm}}{\partial t^2} = 0,$$

condițiile la limite (XXIII.15) și condițiile inițiale.

$$v_{nm}\Big|_{t=0} = \sum_{i=m+1}^{n} a_i U_i,$$

$$\frac{\partial v_{nm}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i b_i U_i.$$

Este evident că

$$\left\{\int\int\int_{\Omega} v_{nm}^2\Big|_{t=0} d\Omega\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad \left\{\int\int\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v_{nm}}{\partial t}\Big|_{t=0}\right|^2 d\Omega\right\}^{1/2} < \varepsilon,$$

dacă n şi m sînt suficient de mari.

Dacă ne folosim acum de proprietatea 5 a sistemelor de funcţii proprii, atunci cu notaţiile lecţiei precedente, avem

$$K_0(0) < \varepsilon^2, \quad K_1(0) < \varepsilon^2, \quad A(t) \equiv 0.$$

Din inegalităţile (XXIII.12) şi (XXIII.14), rezultă cu aceste condiţii că $K_0(t)$ şi $K_1(t)$ vor fi de asemenea oricît de mici vrem noi în orice interval finit pentru t. Astfel, şirurile v_{nm} şi $\frac{\partial v_{nm}}{\partial t}$ satisfac condiţia teoremei lui Riesz-Fischer şi deci converg în medie uniform în raport cu t în orice interval finit $a \leqslant t \leqslant b$. Prin urmare, seria (XXIII.20) converge în medie către o anumită soluţie generalizată. Nu vom cerceta mai amănunţit împrejurările în care această soluţie devine o soluţie în sensul obişnuit al cuvîntului.

Aşa cum vedem, fiecare termen al seriei (XXIII.20) reprezintă o aşa-numită oscilaţie armonică, pulsaţiile λ_i ale oscilaţiilor fiind distribuite în mod discret.

§ 2. Analogia dintre problema oscilaţiilor unui mediu continuu şi oscilaţiile sistemelor mecanice cu un număr finit de grade de libertate

Este uşor de urmărit analogia dintre problema considerată pentru ecuaţia (XXIII.13) şi problema micilor oscilaţii libere ale sistemelor mecanice cu un număr finit de grade de libertate.

Ultima problemă se formulează ca o problemă de integrare a sistemului de ecuaţii

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{(XXIII.22)}$$

cu condiţiile

$$q_j\Big|_{t=0} = (q_j)_0,$$

$$\frac{dq_j}{dt}\Big|_{t=0} = (\dot{q}_j)_0,$$

în care presupunem că $a_{ij} = a_{ji}$.

Într-un astfel de sistem avem în locul funcţiei $u(P, t)$ care depinde de t şi de un punct variabil al spaţiului, o mărime care depinde de t şi de un număr întreg j. Dacă am construi în domeniul Ω o reţea formată dintr-un număr finit de puncte $P_1, P_2, \ldots, P_m$ şi dacă în locul funcţiei $u(P, t)$ am considera mărimile $q_j = u(P_j, t)$ în număr finit, am putea obţine un sistem analog cu (XXIII.22), înlocuind în ecuaţia (XXIII.13) derivatele în raport cu coordonatele prin diferenţe finite.

Soluţia sistemului (XXIII.22), după cum se ştie din cursul de ecuaţii diferenţiale ordinare, are forma

$$q_j = \sum_{r=1}^{m} (c_{jr} \cos \lambda_r t + d_{jr} \sin \lambda_r t),$$

unde λ_r sînt pulsaţiile oscilaţiilor determinate din aşa-numita *ecuaţie secular*ă

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda^2 & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diferenţa dintre problema noastră şi problema determinării soluţiilor sistemului (XXIII.22) constă numai în faptul că sistemul (XXIII.22) are un număr finit de frecvenţe proprii de oscilaţie [1]), în timp ce ecuaţia undelor are un număr infinit de frecvenţe proprii. Analogia considerată poate fi adîncită.

Dacă vom considera mulţimea de numere $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ca un anumit punct din spaţiul cu m dimensiuni, sau mai exact ca un vector $\vec{q}$, care uneşte originea sistemului de referinţă cu

[1]) Egale cu $\lambda_r/2\pi$ ($r = 1, 2, \ldots, m$), dacă λ_r sînt pulsaţiile (N.Red.E.T.).

un anumit punct al acestui spațiu, atunci sistemul de ecuații (XXIII.22) se scrie sub forma

$$\frac{d^2\vec{q}}{dt^2} = A\vec{q} \qquad \text{(XXIII.23)}$$

în care A este o transformare liniară aplicată vectorului $\vec{q}$. Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare se știe că integrarea lui (XXIII.23) se reduce de fapt la o astfel de schimbare de variabile *ortogonală* (transformarea de coordonate în spațiul q), încît matricea transformării A să fie redusă la forma diagonală. Dacă notăm aceste coordonate noi cu $r_1, r_2, \ldots, r_m$, după substituția

$$q_j = \sum_{s=1}^{m} \beta_{js} r \qquad \text{(XXIII.24)}$$

sau

$$r_s = \sum_{j=1}^{m} \beta_{sj} q_j,$$

vom avea sistemul

$$\frac{d^2 r_j}{dt^2} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} r_k,$$

unde

$$a_{jk} = \begin{cases} -\lambda_j^2 ; & j = k \\ 0 ; & j \neq k. \end{cases}$$

Considerarea funcțiilor proprii

$$U_1, U_2, \ldots, U_m,$$

în cazul ecuației undelor este cu totul analogă unei asemenea noi alegeri a coordonatelor. În locul valorilor funcției arbitrare $f(P, t)$ în toate punctele posibile P, vom considera această funcție definită cu ajutorul coeficienților săi $f_i(t)$ din dezvoltarea în serie

$$f(P, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\, U_i(P). \qquad \text{(XXIII.25)}$$

Formula (XXIII.25) împreună cu formula

$$f_i(t) = \int\int_{\Omega}\int f(P, t)\, U_i(P)\, dP \qquad \text{(XXIII.26)}$$

este analogă cu (XXIII.24), cu deosebirea că indicele i din formulele (XXIII.25) și (XXIII.26), corespunzător indicelui s din formula (XXIII.24) variază nu de la 1 pînă la m, ci de la 1 la infinit, iar rolul indicelui j din formulele (XXIII.24), care variază de la 1 pînă la m, îl joacă punctul P, care variază în domeniul Ω.

Acest punct de vedere aruncă o lumină nouă asupra metodei lui Fourier de integrare a ecuației undelor (XXIII.13) cu condiții la limite și condiții inițiale date.

Coincidența observată de noi, se înțelege, nu este întîmplătoare. În esență, atît prima problemă, cît și cea de-a doua, reprezintă cazuri particulare ale unei anumite probleme generale care poate fi formulată în termenii teoriei abstracte a ecuațiilor în spațiile funcționale.

§ 3. Ecuația neomogenă

Fără a adînci chestiunea, ne vom folosi de analogia existentă, indicată în § 2, extinzînd-o în cele ce urmează. Vom ilustra această analogie pe baza problemei integrării ecuației undelor cu termen liber și cu date inițiale nule. Așa cum am văzut, cazul cel mai general se reduce la această problemă.

Să considerăm ecuația

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

și să încercăm să găsim o soluție a acesteia satisfăcînd condițiile

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S} = 0.$$

Căutînd pe u sub forma seriei

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\, U_i + c_0(t) \qquad \text{(XXIII.27)}$$

(orice funcţie u, derivabilă de două ori şi satisfăcînd condiţia $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$, se poate dezvolta într-o astfel de serie) şi reprezentînd pe F sub forma unei serii de acelaşi fel [1]), obţinem

$$c_0''(t) + \Delta\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\, U_i\right) - \frac{\partial^2}{\partial l^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\, U_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t)\, U_i + F_0(t).$$

Să efectuăm derivarea sub semnul sumă. Această derivare este justificată dacă admitem că seriile derivatelor sînt uniform convergente. Vom avea atunci,

$$c_0'(t) - F_0'(t) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i\,[-\lambda_i^2 a_i(t) - a_i''(t) - F_i(t)] = 0.$$

Înmulţind ambii membri ai ultimei egalităţi cu U_j, integrînd şi observînd că toţi termenii dispar afară de acela care avea indicele j, obţinem pentru determinarea lui $a_j(t)$ ecuaţia diferenţială

$$a_j''(t) + \lambda_j^2 a_j(t) + F_j(t) = 0 \qquad \text{(XXIII.28)}$$

Obţinem de asemenea

$$c_0''(t) - F_0(t) = 0.$$

Folosind o formulă cunoscută pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare avem

$$a_i(t) = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^t \sin\,[\lambda_i(t - t_1)]\, F_i(t_1)\, dt_1,$$

$$c_0(t) = \int_0^t (t - t_1)\, F_0(t_1)\, dt_1.$$

[1]) Funcţia F nu satisface, în general, condiţiile la limită. Totuşi, în mod evident, aceasta poate fi înlocuită cu funcţia F', care satisface aceste condiţii şi astfel încît

$$\iiint_\Omega (F' - F)^2\, dx\, dy\, dz < \varepsilon.$$

În baza raţionamentelor din lecţia precedentă, o substituţie de acest fel atrage după sine o eroare, arbitrar de mică în scrierea soluţiei.

Pentru astfel de funcţii $a_i(t)$, formula (XXIII.27) ne dă soluţia căutată dacă seria (XXIII.27) se dovedeşte a fi uniform convergentă împreună cu derivatele sale pînă la ordinul al doilea inclusiv. Pentru a evita cercetarea convergenţei, putem înlocui din nou termenul liber F cu funcţia F_N care este suma Fourier a primilor N termeni. Trecînd apoi la limită, obţinem, folosindu-ne de teorema lui Riesz-Fischer, dacă nu soluţia în sensul obişnuit al cuvîntului, în orice caz soluţia generalizată.

Substituţia noastră (XXIII.27) este analogă schimbării de variabile care reduce sistemul (XXIII.23) la forma canonică. La fel ca şi pentru (XXIII.23), ea rezolvă repede problema.

Este foarte uşor să indicăm şi calea de urmat pentru rezolvarea problemei integrării ecuaţiei căldurii cu membrul drept şi cu condiţii neomogene pe frontieră.

$$\Delta u - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = F(P, t),$$

$$u|_s = f(S, t),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(P).$$

Este suficient să observăm că această problemă poate fi redusă la problema integrării aceleiaşi ecuaţii cu condiţiile

$$u|_S = 0,$$

$$u|_{t=0} = 0.$$

Să dezvoltăm termenul liber într-o serie de forma

$$F(P, t) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(P)\, F_i(t). \qquad \text{(XXIII.29)}$$

O astfel de dezvoltare este posibilă, deoarece, pentru o valoare t fixată, funcţia $F(P, t)$ poate fi dezvoltată într-o serie de forma (XXIII.29). Coeficienţii acestei serii, depind, în general, de t

$$F_i(t) = \iiint_\Omega U_i(P)\, F(P, t)\, dP. \qquad \text{(XXIII.30)}$$

$F_i(t)$ sînt funcţii continue şi derivabile, dacă derivata parţială în raport cu t a funcţiei $F(P,t)$ este continuă, după cum se vede din formula (XXIII.30).

Căutînd soluția ecuației

$$\Delta u_N - \frac{1}{a}\frac{\partial u_N}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} F_i(t)\, U_i(P) \qquad \text{(XXIII.31)}$$

sub forma

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, U_i(P),$$

obținem

$$\sum_{i=1}^{N} U_i(P)\left\{F_i(t) + \frac{1}{a}\, a_1'(t) + \lambda_i a_i(t)\right\} = 0,$$

de unde înmulțind cu U_j și integrînd, vedem că coeficienții $a_j(t)$ trebuie să satisfacă ecuația

$$\frac{1}{a}\, a_i'(t) + \lambda_i a_i(t) + F_i(t) = 0. \qquad \text{(XXIII.32)}$$

Considerînd pentru $a_i(t)$ acea soluție a ecuației (XXIII.32), care se anulează pentru $t = 0$, adică

$$a_i = \int_0^t e^{a\lambda_i (t_1 - t)}\, F_i(t)\, dt,$$

vom vedea că $u_N(t)$ va satisface, atît ecuația (XXIII.31), cît și condițiile inițiale și condițiile la limite impuse.

Trecînd apoi la limită pentru $N \to \infty$ și observînd că membrul drept al lui (XXIII.31) tinde către funcția F, obținem, raționînd ca și mai înainte, soluția generalizată care, pentru un F suficient de neted, va fi o soluție în sensul obișnuit [v. § 2 (XXII)].

În problemele practice, interesul cel mai mare în rezolvarea ecuației undelor îl prezintă tocmai căutarea tuturor frecvențelor λ_i sau, cum se mai spune, căutarea spectrului frecvențelor proprii ale oscilațiilor. Cunoașterea unui asemenea spectru ne permite să evităm fenomenul neplăcut al rezonanței.

Rezonanța apare de cele mai multe ori atunci cînd forța exterioară variază după o lege sinusoidală, iar frecvența ei coincide cu frecvența proprie a oscilației.

Să presupunem, de exemplu, în formula (XXIII.28)

$$F_i(t) = \sin \lambda_i t$$

atunci,

$$a_i(t) = \frac{1}{\lambda_i}\int_0^t \sin \lambda_i (t - t_1) \sin \lambda_i t_1\, dt_1 =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_i}\int_0^t [\cos \lambda_i (2t_1 - t) - \cos \lambda_i t]\, dt_1 =$$

$$= -\frac{t}{2\lambda_i}\cos \lambda_i t + \frac{1}{2\lambda_i^2}\sin \lambda_i t.$$

După cum se vede, $a_i(t)$ crește nemărginit împreună cu t.

§ 4. Vibrațiile longitudinale ale unei bare cu extremitățile libere

În afara cazurilor de aplicare a metodei lui Fourier, studiate de noi, am fi putut indica încă o mulțime de alte cazuri. Este natural, de exemplu, să studiem astfel ecuația

$$p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)\frac{\partial u}{\partial x} + r(x)\, u = \rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} + F(x, t),$$

sau

$$p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)\frac{\partial u}{\partial x} + r(x)\, u = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F(x, t)$$

cu condițiile pentru u la momentul $t = t_0$ și la extremitățile intervalului $0 \leqslant x \leqslant 1$, cum și pentru o serie de alte condiții.

Vom considera, fără a intra în amănunte, unul dintre exemplele cele mai simple de aplicare a teoriei expuse.

Să studiem soluția ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

cu condițiile

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad \text{(XXIII.33)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0. \qquad \text{(XXIII.34)}$$

Această problemă apare, de exemplu, în studiul vibrațiilor longitudinale ale unei bare, libere la ambele capete.

Conform metodei expuse, soluția trebuie căutată sub forma seriei

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t)\, U_j(x) + c_0 + c_1 t,$$

unde $U_j(x)$ sînt soluțiile ecuației diferențiale

$$\frac{d^2U_j}{dx^2} + \lambda_j^2 U_j = 0. \qquad \text{(XXIII.35)}$$

În cazul nostru nu avem niciun motiv să recurgem la ecuații integrale pentru determinarea soluției ecuației (XXIII.35) care satisface condițiile la limite

$$\frac{dU_j}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{dU_j}{dx}\Big|_{x=1} = 0.$$

Soluția generală a ecuației (XXIII.35) va fi

$$U_j = c_j \cos \lambda_j x + d_j \sin \lambda_j x,$$

dacă $\lambda_j^2 > 0$, sau

$$U_j = c_j \operatorname{ch} i\lambda_j x + d_j \operatorname{sh} i\lambda_j x,$$

dacă $\lambda_j^2 < 0$.

În cazurile indicate

$$\frac{dU_j}{dx} = \lambda_j (-c_j \sin \lambda_j x + d_j \cos \lambda_j x),$$

$$\frac{dU_j}{dx} = \lambda_j (c_j \operatorname{sh} i\lambda_j x + d_j \operatorname{ch} i\lambda_j x).$$

Prima din condițiile la limite ne obligă să considerăm $d_j = 0$ în ambele cazuri, iar cea de-a doua condiție ne duce la concluzia că valorile imaginare ale lui λ_j (adică valorile negative pentru λ_j^2) nu sînt posibile.

Astfel,

$$U_j = c_j \cos \lambda_j x, \quad \frac{dU_j}{dx} = -\lambda_j c_j \sin \lambda_j x.$$

Folosind cea de-a doua condiție la limite, ajungem la concluzia că

$$\sin \lambda_j = 0,$$

de unde

$$\lambda_j = j\pi$$

și

$$U_j = c_j \sin j\pi x.$$

Sînt cunoscute formulele

$$\int_0^1 \cos j\pi x \cos k\pi x\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Dacă alegem acum pe $c_i = \sqrt{2}$, obținem, atunci, sistemul căutat de funcții ortogonale și normate U_j sub forma

$$U_j = \sqrt{2} \cos j\pi x.$$

Coeficienții a_j și b_j se obțin sub forma

$$a_j = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi_0(x) \cos j\pi x\, dx,$$

$$b_j = \frac{\sqrt{2}}{\pi j} \int_0^1 \varphi_1(n) \cos j\pi x\, dx,$$

iar răspunsul definitiv îl vom avea sub forma seriei

$$u = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\pi x + b_j \sin j\pi x + c_0 + c_1 t,$$

unde

$$c_0 = \int_0^1 \varphi_0(x)\,dx,\quad c_1 = \int_0^1 \varphi_1(x)dx.$$

Precum vedem, frecvențele vibrațiilor proprii ale unei asemenea bare vor avea forma

$$\pi j, j = 1,2, \ldots, n, \ldots$$

Pentru a încheia expunerea asupra metodei lui Fourier, vom mai face cîteva observații cu caracter general. În raționamentele noastre a jucat un rol important împrejurarea că numerele λ_i nu se acumulau nicăeri. De aceea, în formulele (XXIII.25) și (XXIII.26) pe care le-am considerat ca fiind analoge transformărilor liniare a n numere, una din variabile, indicele i, lua numai o mulțime numărabilă de valori. Așa cum rezultă clar, la o analiză mai amănunțită, această împrejurare este strîns legată de faptul că domeniul Ω este mărginit. Proprietățile ecuațiilor integrale cu nucleu simetric, pe care ne-am bazat, nu mai sînt valabile dacă domeniul nu este mărginit.

Se poate întîmpla, de exemplu, să nu existe funcții proprii ortogonale și normate. Ele se înlocuiesc printr-o mulțime de funcții $U(P, \xi)$, depinzînd de parametrul ξ care variază în mod continuu. Dacă problema nu este autoadjunctă, mulțimea valorilor proprii poate să nu fie reală, ci complexă.

LECȚIA XXIV

ECUAȚII INTEGRALE CU NUCLEU SIMETRIC REAL

§ 1. Proprietăți simple. Operatori complet continui

Am văzut mai sus că problema căutării valorilor proprii și a funcțiilor proprii pentru multe probleme ale fizicii matematice se reduce, cu ajutorul funcției lui Green, la problema valorilor proprii și a funcțiilor proprii ale unei ecuații integrale de tip Fredholm de speța doua, cu nucleu simetric real, care are proprietatea

$$K(P, P_0) = K(P_0, P).$$

Vom studia o ecuație integrală puțin mai generală, și anume

$$\varphi(P_0) = f(P_0) + \lambda \int_\Omega K(P_0, P)\,\varphi(P)\,\rho(P)\,dP, \quad \text{(XXIV.1)}$$

și ecuația omogenă corespunzătoare

$$\varphi(P_0) = \lambda \int_\Omega K(P_0, P)\,\varphi(P)\,\rho(P)\,dP, \quad \text{(XXIV.2)}$$

unde $K(P_0, P)$ este o funcție simetrică de coordonatele punctelor P_0 și P, iar $\rho(P)$ este o funcție măsurabilă nenegativă, numită *pondere* (sau *sarcină*).

Pentru cazul $\rho = 1$, obținem o ecuație integrală cu nucleu simetric.

Pentru ecuațiile integrale considerate și, în particular, pentru ecuațiile integrale cu nucleu simetric au loc o serie întreagă de propoziții importante, la studierea cărora trecem acum.

Vom spune că ecuația (XXIV.1) *are un nucleu simetric încărcat sau un nucleu simetric cu ponderea* $\rho(P)$.

Pentru a nu îngreuia expunerea, ne vom mărgini la cazul cînd funcția $\rho(P)$ este mărginită.

Vom presupune, afară de aceasta, că funcția $\rho(P)$ se anulează numai pe o mulțime de măsură nulă.

Lema 1. *Fie $\rho(P)$ și $\psi(P_0)$ două funcții arbitrare, reale sau complexe* [1]*, avînd modulul de pătrat integrabil cu ponderea $\rho(P)$, în domeniul mărginit Ω, adică*

$$\int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\, dP < \infty \qquad \int_\Omega |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\, dP_0 < \infty.$$

Să presupunem, mai departe, că nucleul real [2] *$K(P, P_0)$ satisface inegalitatea*

$$|K(P, P_0)| \leqslant \frac{A}{r^\alpha},$$

unde r este distanța între punctele P și P_0, iar $\alpha < n$. Atunci, integrala

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(P, P_0)\, \varphi(P) \psi(P_0)| \rho(P)\, \rho(P_0)\, dP\, dP_0 \qquad \text{(XXIV.3)}$$

este convergentă.

Evaluînd integrala (XXIV.3) cu ajutorul inegalității lui Buniakovsky, obținem

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(P, P_0)\, \varphi(P)\, \psi(P_0)|\, \rho(P)\, \rho(P_0)\, dP\, dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\, dP} \sqrt{\int_\Omega \left\{\int_\Omega |K(P, P_0)\psi(P_0)|\, \rho(P_0)\, dP_0\right\}^2 \rho(P) dP}$$

Dacă vom stabili existența integralei

$$\int_\Omega |K(P, P_0)\, \psi(P_0)|\, \rho(P_0)\, dP_0 \qquad (*)$$

[1] Înțelegem prin funcție complexă $\varphi(P)$ de argument real (sau de argumente reale), o funcție care se poate scrie astfel:

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) + i\varphi_2(P),$$

unde $\varphi_1(P)$ și $\varphi_2(P)$ sînt funcții reale.

[2] Nu presupunem nucleul $K(P, P_0)$ simetric.

pentru aproape orice punct P, cum și convergența integralei

$$\int_\Omega \left\{\int_\Omega |K(P, P_0)\, \psi(P_0)|\, \rho(P_0)\, dP_0\right\}^2 \rho(P)\, dP, \qquad \text{(XXIV.4)}$$

atunci, de aici, va rezulta lema noastră.

Avem

$$\int_\Omega |K(P, P_0)\, \psi(P_0)|\, \rho(P_0)\, dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega \frac{A}{r^\alpha} |\psi(P_0)|\, \rho(P_0)\, dP_0 = A \int_\Omega \frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}} |\psi(P_0)|\, \rho(P_0)\, dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant A \sqrt{\int_\Omega \frac{\rho(P_0)}{r^\alpha} dP_0} \sqrt{\int_\Omega \frac{1}{r^\alpha} |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\, dP_0},$$

însă

$$A^2 \int_\Omega \frac{\rho(P_0)\, dP_0}{r^\alpha} \leqslant M, \qquad (**)$$

unde M este o constantă arbitrară.

Prin urmare, integrala (*) există pentru orice punct P, pentru care există integrala

$$\int_\Omega \frac{1}{r^\alpha} |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\, dP_0. \qquad \text{(XXIV.5)}$$

Astfel,

$$\int_\Omega \left[\int_\Omega |K(P, P_0)\, \psi(P_0)|\, \rho(P_0)\, dP_0\right]^2 \rho(P)\, dP \leqslant$$

$$\leqslant M \int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{1}{r^\alpha} |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\, dP_0\right] \rho(P)\, dP.$$

Vom stabili în același timp și existența aproape peste tot a integralei (XXIV.5) și convergența integralei din membrul drept al ultimei inegalități, folosind teorema Lebesgue-Fubini.

Să demonstrăm convergența integralei $2n$-dimensionale

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{\rho^\alpha} |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\, \rho(P)\, dP_0\, dP. \qquad \text{(XXIV.6)}$$

De aici, va rezulta că integrala multiplă

$$\int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{1}{r^\alpha} |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\, dP_0 \right] \rho(P)\, dP$$

va avea sens şi va fi convergentă, la fel ca şi integrala (XXIV.4)

Pentru a stabili convergența integralei (XXIV.6) vom efectua integrarea în altă ordine

$$\int_\Omega \left[|\psi(P_0)|^2 \rho(P_0) \int_\Omega \frac{1}{r^\alpha} \rho(P)\, dP \right] dP_0. \qquad \text{(XXIV.7)}$$

În baza relației (**), funcția de sub semnul integral este mai mică decît

$$B |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0),$$

unde B este o constantă; prin urmare, integrala (XXIV.7) este mai mică decît

$$B \int_\Omega |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\, dP_0,$$

care este convergentă în baza condițiilor lemei; rezultă că este convergentă şi integrala (XXIV.6) şi lema este demonstrată.

Consecință. *Este valabilă egalitatea*

$$\int_\Omega \varphi(P) \left\{ \int_\Omega K(P, P_0) \psi(P_0) \rho(P_0)\, dP_0 \right\} \rho(P)\, dP =$$

$$= \int_\Omega \psi(P_0) \left\{ \int_\Omega K(P, P_0) \varphi(P) \rho(P)\, dP \right\} \rho(P_0)\, dP_0.$$

Demonstrația rezultă din completarea la teorema lui Lebesgue-Fubini (v. lecția VI),

Să introducem următoarele notații

$$\int_\Omega K(P_0, P) \varphi(P) \rho(P)\, dP = A\varphi, \qquad \text{(XXIV.8)}$$

$$\int_\Omega K(P_0, P) \psi(P_0) \rho P_0 dP_0 = A^*\psi. \qquad \text{(XXIX.9)}$$

Din cele demonstrate mai sus rezultă că există integralele

$$\int_\Omega |A\varphi|^2 \rho(P)\, dP, \qquad \int_\Omega |A^*\psi|^2 (P)\, dP.$$

Să observăm că în cazul cînd funcția $K(P_0, P)$ este simetrică, operatorul A coincide cu operatorul A^*. Să presupunem, de asemenea, că

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi(P) \overline{\psi(P)} \rho(P)\, dP, \qquad \text{(XXIV.10)}$$

unde $\overline{\psi}$ înseamnă funcția complexă conjugată cu ψ.

Vom numi expresia (φ, ψ) produsul scalar al funcțiilor φ şi ψ.

Să semnalăm cîteva proprietăți ale acestor simboluri.

1. $A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 A\varphi_1 + a_2 A\varphi_2$.
2. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$.
3. $(\varphi, a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = \overline{a}_1(\varphi, \psi_1) + \overline{a}_2(\varphi, \psi_2)$.
4. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$.
5. Pentru orice funcție φ de pătrat integrabil, avem

$$(\varphi, \varphi) \geqslant 0,$$

în care semnul egalității are loc în cazul, şi numai în cazul, cînd funcția φ este echivalentă cu zero.

În egalitățile 1, 2, 3, a_1, şi a_2 sînt constante. Valabilitatea tuturor egalităților noastre se stabileşte prin verificare directă,

Consecința noastră poate fi scrisă sub forma

$$(\varphi, \overline{A^*\psi}) = (A\varphi, \overline{\psi}). \qquad \text{(XXIV.11)}$$

Pentru cazul unei funcții reale şi simetrice $K(P, P_0)$ şi pentru φ şi ψ reali, vom avea $(\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi)$.

Să trecem la studiul ecuațiilor integrale. Să analizăm înainte de toate ecuația omogenă.

Convenim să considerăm în cele ce urmează numai funcții proprii pentru care modulul pătratului este integrabil cu ponderea ρ.

Teorema 1. *Dacă* λ_1, şi λ_2 *sînt două valori proprii distincte ale ecuațiilor*

$$\varphi = \lambda_1 A\varphi$$

și

$$\psi = \lambda_2 A^* \psi,$$

funcțiile proprii φ *și* ψ, *ale acestor ecuații, satisfac relația*

$$(\varphi, \overline{\psi}) = 0. \qquad \text{(XXIV.12)}$$

Într-adevăr,

$$(\varphi, \overline{A^*\psi}) = \left(\varphi, \overline{\frac{1}{\lambda_2}\psi}\right) = \frac{1}{\lambda_2}(\varphi, \overline{\psi}),$$

$$(A\varphi, \overline{\psi}) = \left(\frac{1}{\lambda_1}\varphi, \overline{\psi}\right) = \frac{1}{\lambda_1}(\varphi, \overline{\psi});$$

din (XXIV.11), rezultă că

$$\lambda_2 (\varphi, \overline{\psi}) = \lambda_1 (\varphi, \overline{\psi})$$

ceea ce este posibil numai dacă $(\varphi, \overline{\psi}) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Funcțiile φ și ψ care satisfac relația (XXIV.12) vor fi numite *ortogonale*, cu *ponderea* $\rho(P)$ sau simplu, *ortogonale*, atunci cînd aceasta nu va duce la neînțelegeri.

C o n s e c i n ț ă. *Funcțiile proprii ale unei ecuații integrale cu nucleu simetric încărcat, corespunzătoare la valori proprii diferite, sînt ortogonale.*

Într-adevăr, pentru nucleul simetric încărcat, toate funcțiile proprii ale ecuației $\psi = \lambda A^* \psi$ se transformă în funcții proprii ale ecuației $\varphi = \lambda A \varphi$, deoarece $A \equiv A^*$.

T e o r e m a 2. *Un nucleu real simetric încărcat nu poate avea valori proprii complexe.*

D e m o n s t r a ț i e. Să presupunem că ecuația noastră admite valoarea proprie λ_0 și funcția proprie φ_0, adică

$$\varphi_0 = \lambda_0 A \varphi_0.$$

Luînd mărimile complex conjugate ale ambilor membri din ecuația noastră și observînd că pentru nucleul real $K(P, P_0)$

$$\overline{A\varphi} = A\overline{\varphi},$$

obținem

$$\overline{\varphi_0} = \overline{\lambda_0} A \overline{\varphi_0}.$$

De aici, rezultă că $\overline{\lambda_0}$ și $\overline{\varphi_0}$ sînt și ele o valoare proprie și o funcție proprie ecuației noastre.

Întrucît $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$ deducem în virtutea consecinței din teorema 1, că φ_0 și $\overline{\varphi_0}$ trebuie să fie ortogonale cu ponderea ρ, adică

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_\Omega \varphi_0(P)\,\overline{\varphi_0(P)}\,\rho(P)\,dP = \int_\Omega |\varphi_0(P)|^2 \rho(P)\,dP = 0;$$

deci, $\varphi_0 = 0$, ceea ce contrazice presupunerea că φ_0 este o soluție nebanală a ecuației

$$\varphi = \lambda A \varphi.$$

T e o r e m a 3. *Toate funcțiile proprii ale unui nucleu simetric real sînt reale (mai exact vorbind, pot fi alese reale).*

Fie

$$\varphi_0(P) = \alpha(P) + i\beta(P)$$

o funcție proprie. Introducînd-o în ecuație, obținem

$$\varphi_0 = \alpha + i\beta = \lambda A \varphi_0 = \lambda A \alpha + i\lambda A \beta;$$

separînd părțile reale și părțile imaginare, obținem

$$\alpha = \lambda A \alpha, \quad \beta = \lambda A \beta.$$

Prin urmare, α și β sînt funcții proprii, iar în locul lui φ_0 putem considera chiar aceste două funcții, combinația lor liniară va fi funcția noastră φ_0.

L e m a 2. *Toate funcțiile proprii ale unui nucleu simetric încărcat pot fi considerate ortogonale și cu ponderea* ρ.

Să observăm că, pentru ecuația cu nucleu simetric de forma descrisă, este valabilă, evident, întreaga teorie a lui Fredholm, deoarece integralele

$$\int_\Omega |K(P, P_0)|\,\rho(P_0)dP_0, \quad \int_\Omega |K(P, P_0)|\,\rho(P_0)dP$$

sînt mărginite. În particular, fiecărei valori proprii λ îi corespunde numai un număr finit de funcții liniar independente.

Să trecem la demonstrarea lemei. Într-adevăr, numai funcțiile proprii corespunzătoare uneia și aceleiași valori proprii λ, ar putea fi neortogonale. Să presupunem că aceste funcții

ar fi, de exemplu, $\varphi_1, \varphi, \ldots, \varphi_q$. În locul lor, să considerăm combinațiile lor liniare

$$\psi_1 = \varphi_1,$$

$$\psi_2 = \varphi_2 - \frac{(\psi_1, \bar{\varphi}_2)}{(\psi_1, \bar{\psi}_1)}\psi_1,$$

$$\psi_3 = \varphi_3 - \frac{(\psi_1, \bar{\varphi}_3)}{(\psi_1, \bar{\psi}_1)}\psi_1 - \frac{(\psi_2, \bar{\varphi}_3)}{(\psi_2, \bar{\psi}_2)}\psi_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_k = \varphi_k - \frac{(\psi_1, \bar{\varphi}_k)}{(\psi_1, \bar{\psi}_1)}\psi_1 - \frac{(\psi_2, \bar{\varphi}_k)}{(\psi_2, \bar{\psi}_2)}\psi_2 - \ldots - \frac{(\psi_{k-1}, \bar{\varphi}_k)}{(\psi_{k-1}, \bar{\psi}_{k-1})}\psi_{k-1}.$$

Este ușor să demonstrăm cu ajutorul metodei inducției complete, că fiecare funcție ψ_s este ortogonală cu toate cele precedente, deoarece

$$(\psi_s, \bar{\psi}_t) = (\varphi_s, \bar{\psi}_t) - \frac{(\psi_1, \bar{\varphi}_s)}{(\psi_1, \bar{\psi}_1)}(\psi_1, \bar{\psi}_t) - \ldots - \frac{(\psi_{s-1}, \bar{\varphi}_s)}{(\psi_{s-1}, \bar{\psi}_{s-1})}(\psi_{s-1}, \bar{\psi}_t).$$

Toți termenii din membrul drept se anulează în baza ipotezei inducției, deoarece $t < s$, afară de $(\varphi_s, \bar{\psi}_t)$ și $-\frac{(\psi_t, \bar{\varphi}_s)}{(\psi_t, \bar{\psi}_t)}(\psi_t, \bar{\psi}_t)$, care se distrug reciproc. Este clar că ψ_k sînt soluțiile ecuației omogene, ceea ce trebuia demonstrat.

Definiție. *Vom spune că șirul de funcții $\{\varphi_n\}$, avînd modulul de pătrat integrabil, converge în medie cu ponderea ρ către funcția φ cu modulul de pătrate integrabil, dacă este valabilă relația*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|^2 \rho\, dP = 0.$$

Observăm că, dacă șirul de funcții $\langle\varphi_n\rangle$ de pătrat integrabil converge uniform către φ, atunci acest șir converge în medie către φ. Totuși propoziția reciprocă, evident, nu are loc. Dacă renunțăm la restricția cu privire la convergența uniformă, putem construi exemple de șiruri convergente peste tot, care nu converg în medie.

Am întîlnit noțiunea de convergență în medie încă în lecția XXII, § 7 și am arătat că un șir nu poate converge în medie

către două funcții diferite. Vom aminti aici încă o dată, că, dacă presupunem integrabilitatea în sensul lui Lebesgue, trebuie să considerăm distincte în propoziția amintită numai funcțiile ale căror valori sînt diferite pe o mulțime de măsură pozitivă.

Definiție. *Vom zice că o mulțime oarecare de funcții este compactă, dacă din orice parte infinită a sa, putem alege un șir convergent.*

Pentru condiții diferite impuse convergenței care poate fi convergența uniformă ș.a.m.d., vom obține și condiții diferite pentru compactitate.

Prin definiția lor, mulțimile compacte de funcții ne amintesc foarte mult de mulțimile mărginite de puncte. Este clar că orice parte infinită a unei mulțimi mărginite de puncte este ea însăși o mulțime infinită și mărginită și de aceea admite cel puțin un punct limită, ceea ce înseamnă că șirul converge către acest punct.

În cursul de Analiză matematică se introduce noțiunea de mulțime de funcțiuni egal continuă. Să amintim definiția acestei noțiuni.

O mulțime de funcții $\{\varphi\}$ se numește egal continuă, dacă pentru orice ε pozitiv, putem găsi un număr $\eta(\varepsilon)$, astfel încît inegalitatea

$$|\varphi(P) - \varphi(P_1)| < \varepsilon$$

să aibă loc, deîndată ce distanța dintre punctele p și p_1 este mai mică decît $\eta(\varepsilon)$, simultan pentru toate funcțiile care aparțin mulțimii $\{\varphi\}$.

Una din aplicațiile cele mai importante ale noțiunii de egală continuitate este așa-numita teoremă a lui Arzelà [1]). Această teoremă se cunoaște astfel: *dacă o mulțime oarecare de funcții $\{\varphi\}$ este egal mărginită și egal continuă, atunci din ea putem extrage un șir uniform convergent.* (Numim egal mărginită, o mulțime de funcții care satisfac inegalitatea $|\varphi| < A$, unde A nu depinde de φ).

Folosindu-ne de noțiunea de compactitate, putem formula acest rezultat astfel:

O mulțime de funcții, egal mărginite și egal continue, va fi compactă dacă se consideră convergența uniformă sau, cu atît mai mult, convergența în medie.

---

[1]) V. *Stepanov V. V.*: Curs de ecuații diferențiale, ed. IV, cap. II, § 2, p. 64 sau *Petrovski I. G.*; Lecții din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, § 11. Editura Tehnică 1952.

Într-adevăr, conform teoremei lui Arzelà, orice asemenea mulțime infinită are cel puțin o funcție limită, adică conține un șir uniform convergent. Se înțelege că aici convergența în medie are și ea loc dacă domeniul de definiție al funcțiilor este mărginit, lucru pe care-l vom presupune. Este evident că o mulțime de funcții, compactă pentru convergența uniformă, este compactă și pentru convergența în medie.

Vom numi mulțimea de funcții $\{\varphi\}$ *egal mărginită în medie cu ponderea* $\rho(P)$, dacă satisface condiția

$$\int_\Omega |\varphi|^2 \rho\, dP \leqslant A.$$

D e f i n i ț i e. Numim operator *complet continuu* un operator $A\varphi$, care fiind aplicat tuturor funcțiilor unei mulțimi oarecare $\{\varphi\}$, *mărginită în medie*, o transformă într-o mulțime *compactă în sensul convergenței în medie* [1]). Dacă mulțimea $A\varphi$ va fi compactă *în sensul convergenței uniforme*, operatorul A se va numi *complet continuu în sens tare.*

T e o r e m a 4. *Operatorul integral*

$$A\varphi = \int_\Omega K(P_0, P)\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP,$$

în care funcția $K(P_0, P)$ *este continuă, iar* $\rho(P)$ *este o funcție integrabilă, este un operator complet continuu în sens tare.*

Fie $\{\varphi\}$ o mulțime de funcții egal mărginită în medie.

$$\int_\Omega |\varphi|^2 \rho\, dP \leqslant A.$$

Folosind inegalitatea lui Buniakovski, este ușor de văzut că familia de funcții $\{A\varphi\}$ este egal mărginită. Într-adevăr,

$$|\omega|^2 \leqslant \int_\Omega |\varphi|^2 \rho\, dP \int_\Omega |K(P_0, P)|^2 \rho(P)\, dP \leqslant AM^2 B,$$

dacă

$$|K(P_0, P)| \leqslant M, \quad B = \int_\Omega \rho(P)\, dP.$$

[1]) A nu se confunda operatorul A cu constanta A folosită pentru mărginire (Nota R.E.T).

Să arătăm că această familie este egal continuă. Fie

$$\omega = A\varphi.$$

Să formăm diferența

$$\omega(P_1) - \omega(P_2) = \int_\Omega [K(P, P_1) - K(P, P_2)]\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP.$$

Avem

$$|\omega(P_1) - \omega(P_2)|^2 \leqslant \int_\Omega |(P)|^2 \rho(P) dP \int_\Omega |K(P, P_1) - K(P, P_2)|^2 \rho(P) dP.$$

Să alegem punctul P_2 atît de apropiat de P_1, încît să avem

$$|K(P, P_1) - K(P, P_2)| < \varepsilon.$$

Aceasta este posibil întrucît nucleul $K(P, P_0)$ este continuu în domeniul de variație închis al variabilelor P, P_0 și, conform cu o teoremă cunoscută, va fi uniform continuu în acest domeniu. Cu acestea, avem

$$|\omega(P_1) - \omega(P_2)|^2 \leqslant A \int_\Omega \varepsilon^2 \rho(P)\, dP = \varepsilon^2 AB,$$

unde

$$B = \int_\Omega \rho(P)\, dP.$$

Vedem, astfel, că diferența $|\omega(P_1) - \omega(P_2)|$ poate fi făcută mai mică decît orice număr dat dinainte, pentru P_1 suficient de aproape de P_2, pentru orice $\omega = A\varphi$, deoarece în evaluarea noastră nu au intrat proprietățile individuale ale funcției φ. Prin urmare, familia $\{A\varphi\}$ este egal continuă. De aici, rezultă compactitatea acestei familii în sensul convergenței uniforme și cu atît mai mult, în sensul convergenței în medie.

Să presupunem acum că nucleul $K(P_0, P)$ este real și continuu peste tot în domeniul $\Omega \times \Omega$ în raport cu ambele variabile, cu excepția mulțimii $\{P = P_0\}$ și că satisface peste tot în domeniul $\Omega \times \Omega$ inegalitatea

$$|K(P_0, P)| \leqslant \frac{A}{r^{\frac{n}{2}-\alpha}}, \quad \alpha > 0. \qquad \text{(XXIV.13)}$$

Vom numi asemenea nuclee *aproape regulate*. Este valabilă

Teorema 5. *Operatorul integral* A.

$$A\varphi = \int_\Omega K(P_0, P)\,\varphi(P)\,\rho(P)\,dP,$$

în care nucleul $K(P_0, P)$ *este aproape regulat, iar funcția* $\rho(P)$ *este mărginită, reprezintă un operator complet continuu în sens tare.*

Demonstrarea acestei teoreme este foarte asemănătoare cu demonstrația teoremei precedente.

Fie $\{\varphi\}$ o familie de funcții egal mărginită în medie. Să arătăm că familia $\{A\varphi\}$ este egal mărginită și egal continuă.

Ca și mai înainte, proprietatea familiei $\{A\varphi\}$ de a fi egal mărginită rezultă din inegalitatea lui Buniakovski. Într-adevăr, dacă

$$\int_\Omega |\varphi(P)|^2\,\rho(P)dP \leqslant M,$$

atunci,

$$\left[\int_\Omega K(P_0, P)\,\varphi(P)\,\rho(P)\,dP\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_\Omega |K(P_0, P)|^2\,\rho(P)\,dP\right]\left[\int_\Omega |\varphi(P)|^2\,\rho(P)\,dP\right].$$

În virtutea condiției (XXIV.13), avem

$$\int_\Omega [K(P_0, P)]^2\,\rho(P)\,dP \leqslant \int_\Omega \frac{A^2}{r^{n-2\alpha}}\,\rho(P)\,dP \leqslant C,$$

unde C este o constantă arbitrară. Folosindu-ne de acestea, obținem

$$\left[\int_\Omega K(P_0, P)\,\varphi(P)\,\rho(P)\,dP\right]^2 \leqslant MC.$$

Proprietatea familiei $\{A\varphi\}$ de a fi egal mărginită este demonstrată.

Fie acum $\omega = A\varphi$. Să alcătuim diferența

$$\omega(P_1) - \omega(P_2) = \int_\Omega [K(P_1, P) - K(P_2, P)]\,\varphi(P)\,\rho(P)\,dP.$$

Avem

$$[\omega(P_1) - \omega(P_2)]^2 \leqslant \int_\Omega |\varphi(P)|^2\,\rho(P)\,dP \int_\Omega |K(P_1, P) -$$

$$- K(P_2, P)|^2\,\rho(P)\,dP \leqslant M\int_\Omega |K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2\rho(P)dP = MI,$$

unde am notat cu I integrala

$$\int_\Omega K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2\,\rho(P)\,dP. \qquad \text{(XXIV.14)}$$

Să evaluăm această integrală. Funcția $|K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2$ reprezintă o funcție de $3n$ coordonate ale punctelor P, P_1, P_2, continuă în domeniul $\Omega \times \Omega \times \Omega$, peste tot în afara mulțimii de puncte $\{P = P_1$ și $P = P_2\}$. Fie r_1 distanța de la punctul P la punctul P_1, iar r_2 distanța de la punctul P la punctul P_2. În spațiul celor $3n$ variabile, să excludem din domeniul $\Omega \times \Omega \times \Omega$ mulțimile deschise de puncte care satisfac condițiile $r_1 < \eta$ și $r_2 < \eta$, unde η este un număr pozitiv arbitrar, dat dinainte. În mulțimea închisă rămasă, funcția $|K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2$ va fi uniform continuă, conform teoremei lui Weierstrass. Pentru $P_1 = P_2$, ea se anulează. Prin urmare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, putem găsi un număr pozitiv $\delta(\varepsilon, \eta)$, încît de îndată ce distanța dintre punctele P_1 și P_2, pe care o notăm cu r^*, va fi mai mică decît δ, va avea loc inegalitatea

$$|K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2 < \varepsilon.$$

Ne vom folosi de această observație pentru evaluarea integralei care ne interesează. Să presupunem dat un număr pozitiv, arbitrar, ε. Înconjurînd în domeniul de variație al lui P ambele puncte singulare P_1, P_2 cu sfere mici de rază η și desfăcînd integrala (XXIV.14) în două, vom pune

$$I_1 = \int_{\substack{r_1 < \eta \\ r_2 < \eta}} |K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2\,\rho(P)\,dP;$$

$$I_2 = \int_{\substack{r_1 \geqslant \eta \\ \text{sau} \\ r_2 \geqslant \eta}} |K(P_1, P) - K(P_2, P)|^2\,\rho(P)\,dP.$$

Atunci, $I = I_1 + I_2$. Nu este greu de văzut că putem lua totdeauna $\eta(\varepsilon)$ suficient de mic, pentru a avea

$$I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Într-adevăr,

$$[K(P_1, P) - K(P_2, P)]^2 \leqslant [K(P_1, P) - K(P_2, P)]^2 + [K(P_1, P) + K(P_2, P)]^2 = 2[K(P_1, P)]^2 + 2[K(P_2, P)]^2$$

și, prin urmare,

$$I_1 \leqslant 2\int_{\substack{r_1 < \eta \\ r_2 < \eta}} [K(P_1, P)]^2 \rho(P)\, dP + 2\int_{\substack{r_1 < \eta \\ r_2 < \eta}} [K(P_2, P)]^2 \rho(P)\, dP.$$

De aici, folosind evaluarea (XXIV.13) pentru $K(P_1, P)$, $K(P_2, P)$, obținem

$$I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alegînd mărimea $\eta(\varepsilon)$, putem găsi mai departe $\delta(\varepsilon)$, astfel, încît să aibă loc, peste tot sub semnul integral I_2, inegalitatea

$$[K(P_1, P) - K(P_2, P)]^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \max \rho(P)\, m\Omega},$$

unde $m\Omega$ este volumul domeniului Ω, de îndată ce $r^* < \delta$.

Vom avea, aici,

$$I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2m\Omega} \int_{\Omega} \frac{\rho(P)}{\max \rho}\, dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De unde

$$I \leqslant \varepsilon.$$

Vedem că mărimea $\delta(\varepsilon)$ depinde numai de distanța dintre punctele P_1 și P_2 și nu depinde de funcția φ. Prin urmare, mulțimea funcțiilor $\{A\varphi\}$ este egal continuă. Am demonstrat mai sus că aceasta este egal mărginită. În baza teoremei lui Arzelà, mulțimea $\{A\varphi\}$ este compactă în sensul convergenței uniforme. Astfel, operatorul A este complet continuu în sens tare, ceea ce trebuia demonstrat.

Vom arăta mai departe că proprietatea unui operator de a fi complet continuu este deosebit de importantă, deoarece chiar din aceasta vor rezulta teoremele fundamentale pentru ecuațiile cu nucleu simetric încărcat.

Se poate arăta că întreaga parte calitativă a teoriei lui Fredholm pentru nucleele nesimetrice, adică alternativa lui Fredholm, condiția ca ecuațiile să fie rezolvabile ș.a.m.d., se transpun în întregime pentru ecuația

$$\varphi = \lambda A\rho + f$$

cu operatorul A complet continuu. Totuși, nu ne vom opri asupra acestei chestiuni.

§ 2. Demonstrarea existenței unei valori proprii

Teorema 6. *Ecuația integrală*

$$\varphi = \lambda A\varphi \qquad \text{(XXIV.15)}$$

cu nucleu simetric real are cel puțin o valoare proprie, dacă A este un operator complet continuu.

Demonstrație. Să observăm înainte de toate că pentru scopurile noastre este suficient să stabilim existența cel puțin a unei valori proprii și a unei funcții proprii pentru ecuația

$$\varphi = \mu A^2\varphi.$$

Într-adevăr, să transcriem această ultimă ecuație sub forma

$$\varphi - \mu A^2\varphi = 0$$

și fie μ_0 valoarea sa proprie, iar φ_0 funcția proprie corespunzătoare. Punînd $\mu_0^2 = \lambda_0$, avem

$$(E - \lambda_0 A)[(E + \lambda_0 A)\varphi_0] = 0$$

cu notațiile din lecția XVIII.

Membrul stîng al ultimei ecuații se poate anula numai în cazul cînd funcția

$$\psi_0 = (E + \lambda_0 A)\varphi_0$$

este soluția ecuației

$$(E - \lambda A)\psi = 0 \text{ pentru } \lambda = \lambda_0.$$

Prin urmare sau $\psi = 0$, sau ecuația $(E - \lambda A)\psi = 0$ admite o soluție nebanală. În primul caz, avem

$$(E + \lambda_0 A)\varphi_0 = 0$$

și deci φ_0 este funcție proprie a ecuației (XXIV.15) corespunzătoare valorii proprii $\lambda = -\lambda_0$. În al doilea caz, obținem de asemenea existența valorii proprii $\lambda = \lambda_0$ pentru ecuația (XXIV.15).

Să considerăm expresia

$$\frac{(A\varphi, A\varphi)}{((\varphi, \varphi)} = \frac{(\varphi, A^2\varphi)}{(\varphi, \varphi)}$$

pentru toate funcțiile posibile φ, reale, de pătrat integrabil și neechivalente cu zero. Această expresie nu poate fi nulă pentru orice φ, deoarece, altfel, $A\varphi$ ar fi identic nul. Este evident că ea nu este negativă. Afară de aceasta, ea nu poate lua valori nemărginit de mari. Într-adevăr, această expresie nu se schimbă atunci cînd înmulțim funcția cu o constantă arbitrară. De aceea, este suficient să stabilim proprietatea acestei expresii de a fi mărginită pentru funcții egal mărginite în medie, iar aceasta rezultă în mod evident din cele demonstrate anterior. Prin urmare, expresia $\frac{(A\varphi, A\varphi)}{(\varphi, \varphi)}$ are o margine superioară precisă, pe care o notăm cu $\varkappa_1$.

Avem, evident,

$$\frac{(A^2\varphi, A^2\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{(A^2\varphi, A^2\varphi)}{(A\varphi, A\varphi)} \frac{(A\varphi, A\varphi)}{(\varphi, \varphi)} \leqslant \varkappa_1^2. \qquad \text{(XXIV.16)}$$

Fie φ_n un șir de funcții, astfel încît

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1 \qquad \text{(XXIV.17)}$$

$$\lim_{n\to\infty} (A\varphi_n, A\varphi_n) = \varkappa_1. \qquad \text{(XXIV.18)}$$

Putem construi totdeauna un asemenea șir. În baza proprietății marginii superioare, există un șir φ_n^*, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(A\varphi_n^*, A\varphi_n^*)}{(\varphi_n^*, \varphi_n^*)} = \varkappa_1.$$

Punînd apoi,

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^*}{\sqrt{(\varphi_n^*, \varphi_n^*)}},$$

obținem șirul căutat.

Să considerăm șirul

$$\psi_n = \varkappa_1\varphi_n - A^2\varphi_n.$$

Vom arăta că

$$\lim_{n\to\infty} (\psi_n, \psi_n) = 0. \qquad \text{(XXIV.19)}$$

Într-adevăr,

$$(\psi_n, \psi_n) = \varkappa_1^2(\varphi_n, \varphi_n) - 2\varkappa_1(\varphi_n, A^2\varphi_n) + (A^2\varphi_n, A^2\varphi_n).$$

În baza relației (XXIV.16), avem

$$(\psi_n, \psi_n) \leqslant 2\varkappa_1^2 - 2\varkappa_1(\varphi_n, A^2\varphi_n) = 2\varkappa_1(\varkappa_1 - (A\varphi_n, A\varphi_n)).$$

Folosind formula (XXIV.18), ne convingem de valabilitatea relației (XXIV.19).

Astfel, șirul de funcții $\varkappa_1\varphi_n - A^2\varphi_n$ tinde în medie către zero. Datorită continuității complete în sens tare a operatorului A^2, șirul $A^2\varphi_n$ este egal continuu și egal mărginit. De aceea putem extrage din el un subșir $A^2\varphi_{n_k}$, uniform convergent către o anumită funcție continuă.

Însă,

$$\lim A^2\varphi_{n_k} = \varkappa_1 \lim \varphi_{n_k}, \qquad \text{(XXIV.20)}$$

unde limita din dreapta trebuie considerată în medie. Înseamnă că șirul φ_{n_k} are de asemenea drept limită în medie o funcție continuă pe care o notăm cu φ_0. Trecînd la limită în relația (XXIV.20), obținem

$$\varkappa_1\varphi_0 - A^2\varphi_0 = 0$$

sau, punînd

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\mu_1},$$

avem

$$\varphi_0 - \mu_1 A^2\varphi_0 = 0.$$

Prin urmare, ecuația (XXIV.15) admite o valoare proprie μ_1, ceea ce trebuia demonstrat.

Comparînd teoremele 4, 5 și 6, vedem că am demonstrat existența a cel puțin unei funcții proprii și a unei valori proprii pentru ecuațiile integrale cu nucleu simetric real, încărcat, în două cazuri: pentru nuclee continue și pentru nuclee aproape regulate.

Este important să observăm că funcția proprie, a cărei existență am demonstrat-o, este totdeauna continuă. Aceasta rezultă din proprietatea operatorului A de a fi complet continuu în sens tare.

LECȚIA XXV

FORMULA BILINIARĂ ȘI TEOREMA LUI HILBERT-SCHMIDT

§ 1. Formula biliniară

Considerînd ecuația integrală cu nucleu simetric încărcat

$$\varphi = \lambda A\varphi, \tag{XXV.1}$$

am demonstrat în lecția precedentă că această ecuație admite totdeauna o funcție proprie φ și o valoare proprie λ_1. Înmulțind această funcție cu o constantă, putem face ca

$$\int_{\Omega} [\varphi_1(P)]^2 \rho(P)\, dP = 1.$$

Să introducem acum un nou operator integral $B_1\varphi$, definit prin condiția

$$B_1\varphi = \psi(P_0) = \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(P_0)\int_{\Omega} \varphi_1(P)\varphi(P)\rho(P)\, dP.$$

Este evident că nucleul operației B_1 va fi

$$L(P, P_0) = \frac{\varphi_1(P_0)\varphi_1(P)}{\lambda_1}.$$

Ecuația

$$\varphi = \lambda B_1\varphi \tag{XXV.2}$$

admite, evident, o valoare proprie λ_1 și o funcție proprie φ_1. Într-adevăr, funcția $B_1\varphi$ diferă de funcția φ_1 numai printr-un factor. Prin urmare, oricare ar fi λ, putem considera, cu aproximație un factor constant, drept soluție a ecuației (XXV.2),

numai funcția φ_1. Introducînd $\varphi = \varphi_1$ în (XXV.2), obținem

$$\varphi_1(P) = \frac{\lambda}{\lambda_1}\varphi_1(P),$$

de unde

$$\lambda = \lambda_1.$$

L e m ă. *Toate funcțiile proprii ale ecuației integrale*

$$\varphi = \lambda(A - B_1)\varphi \tag{XXV.3}$$

cu nucleul

$$K - L = K(P, P_0) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(P_0)}{\lambda_1} \tag{XXV.4}$$

sînt funcții proprii ale ecuației (XXV.1) *pentru aceleași valori ale lui* λ. *Reciproc, toate funcțiile proprii ale ecuației* (XXV.1) *ortogonale cu* φ_1 *sînt funcții proprii ale ecuației* (XXV.3) *pentru aceleași valori ale lui* λ.

D e m o n s t r a ț i e. Să presupunem că $\varphi_k (k \neq 1)$ este o soluție a ecuației (XXV.1), corespunzătore valorii proprii λ_k. Atunci,

$$B_1\varphi_k = 0$$

în virtutea faptului că toate funcțiile proprii ale ecuației (XXV.1) sînt ortogonale. Înseamnă că

$$(A - B_1)\varphi_k = A\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k,$$

adică

$$\varphi_k = \lambda_k(A - B_1)\varphi_k.$$

Mai departe,

$$\lambda(A - B_1)\varphi_1 = 0.$$

Prin urmare, toate soluțiile ecuației (XXV.1), afară de φ_1 satisfac ecuația (XXV.3) și anume, cu aceleași valori proprii.

Să demonstrăm acum că orice funcție proprie a ecuației (XXV.3) verifică ecuația (XXV.1).

Vom stabili, înainte de toate, că toate soluțiile lui (XXV.3) sînt ortogonale cu φ_1, oricare ar fi λ. Într-adevăr, din (XXV.3), avem

$$(\varphi, \varphi_1) - \lambda[(A - B_1)\varphi, \varphi_1] = \lambda(\varphi, (A - B_1)\varphi_1) = 0.$$

Fie acum φ_k^* o soluţie oarecare a lui (XXV.3), corespunzătoare lui $\lambda = \lambda^*$. În virtutea faptului că φ_k^* este ortogonal cu φ_1, avem

$$B_1\varphi_k^* = 0.$$

Astfel,

$$(A - B_1)\,\varphi_k^* = A\varphi_k^*$$

şi, prin urmare,

$$\varphi_k^* = \lambda^*(A - B_1)\,\varphi_k^* = \lambda^* A\varphi_k^*,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să notăm prin prescurtare

$$A - B_1 = A_1.$$

Operatorul A_1 este din nou un operator integral simetric. Se pot prezenta două posibilităţi : sau nucleul său este identic nul, sau el are cel puţin încă o funcţie proprie $\varphi_2(P)$, corespunzătoare valorii proprii λ_2 (λ_2 poate fi uneori egal cu λ_1). Atunci, însă, putem construi operaţia B_2, avînd nucleul

$$\frac{\varphi_2(P)\,\varphi_2(P_0)}{\lambda_2}$$

şi repetînd raţionamentele anterioare putem ajunge la operatorul

$$A_2 = A - B_1 - B_2$$

pentru care ecuaţia integrală

$$\varphi = \lambda A_2\varphi$$

va avea aceleaşi funcţii ca şi (XXV.1), afară de φ_1 şi φ_2.

Vom continua acest proces.

Dacă nucleul A are numai m funcţii proprii, atunci operatorul

$$A_m = A - B_1 - B_2 - \ldots - B_m \qquad \text{(XXV.5)}$$

nu mai are nici o funcţie proprie, cu alte cuvinte, este identic nul.

De aici, obţinem teorema.

T e o r e m a 1. *Orice nucleu simetric încărcat, avînd un număr finit de funcţii proprii, poate fi reprezentat sub forma*

$$K(P, P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \qquad \text{(XXV.6)}$$

şi prin urmare este degenerat.

Dacă nucleul $K(P, P_0)\rho(P_0)$ are o mulţime infinită de funcţii proprii, atunci, aranjînd toţi λ_i în ordinea crescătoare a valorilor lor absolute, putem obţine operatorii

$$A_m = A - B_1 - B_2 - \ldots - B_m,$$

pentru care toate valorile proprii sînt suficient de mari în valoare absolută, deoarece, în baza celei de a patra teoreme a lui Fredholm, şirul $\{\lambda_m\}$ trebuie să fie divergent, dacă este infinit. Fie

$$\varkappa_m = \frac{1}{\lambda_m^2}.$$

Atunci, pentru funcţiile φ, astfel încît $(\varphi, \varphi) = 1$,

$$\max\,(A_m\varphi, A_m\varphi) = \varkappa_m.$$

Într-adevăr, dacă $(A_m\varphi, A_m\varphi)$ ar putea lua valori mai mari decît $\varkappa_m$, ecuaţia

$$\varphi = \lambda A_m\varphi$$

va avea valoarea proprie λ_{m+1}, pentru care

$$|\lambda_{m+1}| < |\lambda_m|,$$

ceea ce este imposibil.

Avem, astfel,

$$\lim_{m\to\infty}\,(A_m\varphi,\ A_m\varphi) = 0, \qquad \text{(XXV.7)}$$

şi anume, uniform pentru toate funcţiile φ egal mărginite în medie.

Într-o măsură oarecare, egalitatea (XXV.7) ne spune că $A_m\varphi$ tinde către zero. Prin urmare, nucleul operatorului $A - \sum_{i=1}^{m} B_i$ tinde către zero.

De aceea, seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

reprezintă nucleul $K(P, P_0)$ într-un anumit sens.

Dacă s-ar întîmpla ca nucleul operatorului $\sum B_i$ să fie o serie uniform convergentă, nucleul operatorului $K - \sum_{i=1}^{m} B_i$ ar fi un nucleu fără valori proprii, cu alte cuvinte ar fi nul.

Am obţinut, astfel,

Teorema 2. *Dacă seria*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \qquad \text{(XXV.8)}$$

este uniform convergentă în raport cu cele două variabile, atunci suma ei este egală cu nucleul $K(P, P_0)$:

$$K(P, P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_0)}{\lambda_i}.$$

Se poate, totuşi, întîmpla ca seria (XXV.8) să nu fie uniform convergentă. În aceste împrejurări mai este interesantă o chestiune. *Vom numi funcţia* $f(P_0)$ *de forma*

$$f(P_0) = \int_{\Omega} K(P, P_0)\, h(P)\, \rho(P)\, dP,$$

unde funcţia h *este de pătrat integrabil, funcţie reprezentabilă prin surse prin intermediul lui* h *cu ajutorul nucleului* K.

Introducînd în locul lui $K(P, P_0)$ presupusa lui reprezentare (XXV.8), obţinem pentru f formula

$$(P_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(P_0) \int_{\Omega} \frac{\varphi_i(P)\, h(P)\, \rho(P)\, dP}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i}\, \varphi_i(P_0), \qquad \text{(XXV.9)}$$

unde

$$h_i = \int_{\Omega} h(P)\, \varphi_i(P)\, \rho(P)\, dP.$$

Să demonstrăm următoarea teoremă.

Teorema 3. *Dacă* $f(P_0)$ *este o funcţie reprezentabilă prin surse prin intermediul lui* h, *în care integrala*

$$\int_{\Omega} h^2(P)\, \rho(P)\, dP$$

este convergentă, atunci seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i}\, \varphi_i(P_0) \qquad \text{(XXV.10)}$$

este convergentă în medie, iar suma ei este egală cu $f(P_0)$. *Cu alte cuvinte,*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} \left[f(P_0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{h_i}{\lambda_i}\, \varphi_i(P_0)\right]^2 \rho(P_0)\, dP_0 = 0. \qquad \text{(XXV.11)}$$

Această teoremă este o consecinţă evidentă a formulei (XXV.7). Într-adevăr,

$$f(P_0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{h_i}{\lambda_i}\, \varphi_i(P_0) = \int_{\Omega} \left[K - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_0)}{\lambda_i}\right] h(P)\rho(P)dP = A_N h$$

de unde, aplicînd formula (XXV.7), obţinem dintr-o dată teorema noastră.

În lumina teoremelor demonstrate ne va fi uşor să lămurim în cele ce urmează sensul raţionamentelor cu ajutorul cărora se stabileşte existenţa valorilor proprii. Să demonstrăm la început o lemă.

Lema 2. (**Inegalitatea lui Bessel**). *Fie* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \ldots$ *un şir finit sau infinit de funcţii reale, ortogonale şi normate, cu ponderea* ρ.

$$\int_{\Omega} \varphi_i(P)\, \varphi_j(P)\, \rho(P)\, dP = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

şi fie f *o funcţie oarecare de pătrat integrabil*

$$\int_{\Omega} f^2 \rho\, dP = A.$$

Vom numi numerele

$$f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \rho\, dP$$

coeficienţii Fourier pentru funcţia f. *Atunci, seria* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$ *este convergentă, iar suma ei nu depăşeşte pe* A :

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \leqslant A. \qquad \text{(XXV.12)}$$

Dacă pentru o anumită funcţie inegalitatea (XXV.12) se transformă în egalitate, se spune că sistemul de funcţii este închis în raport cu f. Un sistem de funcţii închis în raport cu toate funcţiile de pătrat integrabil se numeşte simplu, *sistem închis*.

Inegalitatea (XXV.12) poartă denumirea de *inegalitatea lui Bessel.*

Pentru demonstraţie, stabilim la început că

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^2 \leqslant A,$$

de unde obţinem apoi pentru $N \to \infty$ demonstraţia lemei noastre. Avem

$$0 \leqslant \int_{\Omega} \left(f - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i f_i \right)^2 \rho \, dP =$$

$$= \int_{\Omega} f^2 \rho \, dP - 2 \sum_{i=1}^{N} f_i \int_{\Omega} f \varphi_i \rho \, dP + \sum_{i=1}^{N} f_i^2 \int_{\Omega} \varphi^2 \rho \, dP =$$

$$= \int_{\Omega} f^2 \rho \, dP - \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = A - \sum_{i=1}^{N} f_i^2.$$

Lema este demonstrată.

Faptul că sistemul $\{\varphi_i\}$ este închis în raport cu f are următoarea semnificaţie. Dacă

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = A,$$

atunci,

$$\lim_{N \to \infty} \left[A - \sum_{i=1}^{N} f_i^2 \right] = 0$$

şi, deci,

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\Omega} \left(f - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i f_i \right)^2 \rho \, dP = 0,$$

cu alte cuvinte funcţia $f(P)$ poate fi reprezentată cu ajutorul seriei $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \varphi_i(P)$ convergentă în medie.

Teorema 3 stabileşte astfel proprietatea unui sistem de funcţii proprii de a fi închis în raport cu orice funcţie reprezentabilă prin surse.

L e m a 3. *Fie*

$$u_1(P), u_2(P, \ldots u_N(P)$$

un sistem oarecare de funcţii ortogonale şi normate, iar $f(P)$, o funcţie arbitrară de pătrat integrabil. Vom cerceta minimul integralei

$$I_N = \int_{\Omega} [f(P) - \sum_{i=1}^{N} a_i u_i(P)]^2 \, dP.$$

Acest minim este atins pentru

$$a_i = \int_{\Omega} f(P) \, u_i(P) \, dP$$

şi este egal cu

$$\int_{\Omega} [f(P)]^2 \, dP - \sum_{i=1}^{N} a_i^2.$$

Într-adevăr, fie

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i(P) + R_N(P); \qquad \text{(XXV.13)}$$

înmulţind ambii membri ai lui (XXV.13) cu $u_i(P)$ şi integrînd obţinem

$$\int_{\Omega} R_N(P) \, u_i(P) \, dP = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Cu acestea,

$$I_N = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{N} (f_i - a_i) \, u_i(P) + R_N(P) \right]^2 dP -$$

$$= \int_{\Omega} R_N^2(P) \, dP + \sum_{i=1}^{N} (f_i - a_i)^2.$$

Este evident că această expresie va avea un minim pentru $a_i = f_i$. Atunci,

$$\int_\Omega R_N^2(P)\,dP = \int_\Omega \left[f(P) - \sum_{i=1}^{N} f_i u_i(P) \right]^2 dP = \int_\Omega f^2(P)\,dP - \sum_{i=1}^{N} f_i^2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să mai facem încă două mici observaţii.

Teorema 4. *Pentru orice funcţie ψ de pătrat integrabil este valabilă egalitatea*

$$(\psi, A\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i}, \qquad \text{(XXV.14)}$$

unde ψ_i sînt coeficienţii Fourier ai funcţiei ψ, adică

$$\psi_i = \int_\Omega \psi(P)\,\varphi_i(P)\,\rho(P)\,dP.$$

Observăm că $A_m\psi = A\psi - \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}$, prin urmare,

$$(\psi, A_m\psi) = (\psi, A\psi) - \sum_{i=1}^{m} \left(\psi, \frac{\psi_i \varphi_i(P)}{\lambda_i} \right) = (\psi, A\psi) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i}.$$

Însă,

$$|(\psi, A_m\psi)| = \left| \int_\Omega \psi A_m \psi \rho\, dP \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_\Omega \psi^2 \rho\, dP \int_\Omega (A_m\psi)^2 \rho\, dP} \sqrt{\int_\Omega \psi^2 \rho\, dP}\, |\varkappa_m|.$$

Întrucît $\varkappa_m \to 0$ pentru $m \to \infty$, atunci şi mărimea $(\psi, A_m\psi)$ tinde către zero.

Avem

$$\lim_{m\to\infty} \left| (\psi, A\psi) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i} \right| = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Consecinţă. *Dacă toate valorile proprii λ_i sînt pozitive, atunci şi $(\psi, A\psi) \geqslant 0$ oricare ar fi ψ şi reciproc, dacă $(\psi, A\psi)$ nu ia niciodată valori negative, toţi λ_i sunt pozitivi.*

Nucleele care au numai valori proprii pozitive se numesc *definite pozitiv.*

Teorema 5. *Cea mai mică valoare proprie a unui nucleu pozitiv definitiv poate fi determinată cu ajutorul egalităţii*

$$\frac{1}{\lambda_0} = \sup_{(\psi,\psi)=1} (\psi, A\psi). \qquad \text{(XXV.15)}$$

Într-adevăr, $(\psi, A\psi) = \frac{1}{\lambda_0}$ pentru $\psi = \varphi_0$. Pe de altă parte,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{\lambda_0},$$

unde λ_0 este cel mai mic dintre toţi λ_i pozitivi şi deoarece $(\psi, \psi) = 1$, avem, în virtutea lui (XXV.12),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i} \leqslant \frac{1}{\lambda_0},$$

ceea ce şi trebuia demonstrat.

Să amintim că tocmai cu ajutorul determinării marginii superioare a expresiei $(\psi, A\psi)$ cu condiţia $(\psi, \psi) = 1$, a fost stabilită existenţa valorii proprii pentru nucleul iterat K_2.

§ 2. Teorema lui Hilbert-Schmidt

Pentru a încheia studiul nostru, vom demonstra că, în anumite condiţii cunoscute, convergenţa seriei (XXV.10) este uniformă.

Teorema 6. (Hilbert-Schmidt). *Dacă nucleul simetric şi real $K(P_0, P)$ este de pătrat integrabil în raport cu fiecare din variabile, integrala pătratului fiind uniform mărginită în raport cu cea de-a doua variabilă, adică*

$$\int_\Omega |K(P_0, P)|^2 \rho(P)\,dP = A(P_0) \leqslant A, \qquad \text{(XXV.16)}$$

atunci, seria (XXV.10) *converge uniform către funcţia $f(P_0)$.*

Într-adevăr, în baza inegalității lui Bessel, seria $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P_0)}{\lambda_i^2}$ converge, avînd loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P_0)}{\lambda_i^2} \leqslant A. \qquad \text{(XXV.17)}$$

Aceasta rezultă din faptul că $\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i}$ servesc drept coeficienții Fourier pentru funcția $f = K(P_0, P)$

$$\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} = \int_{\Omega} K(P_0, P)\, \varphi_i(P)\, \rho(P)\, dP. \qquad \text{(XXV.18)}$$

Afară de aceasta, este convergentă și seria cu termenii constanți

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 \qquad \text{(XXV.19)}$$

de asemenea în baza inegalității lui Bessel.

Din convergența seriei (XXV.19) rezultă

$$\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 < \varepsilon_m,$$

unde $\varepsilon_m \to 0$ pentru $m \to \infty$.

Să evaluăm suma

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{h_i\, \varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \right|. \qquad \text{(XXV.20)}$$

Inegalitatea lui Cauchy ne dă

$$\left(\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{h_i \varphi_i}{\lambda_i} \right|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2\right)\left(\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2}{\lambda_i^2}\right) \leqslant \varepsilon_m A;$$

prin urmare, suma (XXV.20) este oricît de mică vrem împreună cu ε_m și deci seria (XXV.10) este uniform convergentă.

Să notăm

$$\gamma(P_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(P_0)}{\lambda_i}.$$

Trecînd la limită în formula (XXV.11), obținem

$$\int_{\Omega} (f - \gamma)^2\, \rho\, dP_0 = 0.$$

Prin urmare,

$$f(P_0) = \gamma(P_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(P_0)}{\lambda_i}. \qquad \text{(XXV.21)}$$

Teorema lui Hilbert-Schmidt este demonstrată.

Consecință. (Seria biliniară pentru nucleul iterat). *Dacă nucleul $K(P_0, P)$ satisface condițiile teoremei, seria biliniară a nucleului iterat este convergentă, și anume, uniform, în raport cu P_0 dat.*

Coeficienții Fourier pentru nucleul iterat vor fi funcțiile $\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i^2}$. Într-adevăr,

$$\int_{\Omega} K_2(P_0, P)\, \varphi_i(P)\, \rho(P)\, dP =$$

$$= \int_{\Omega} K(P_0, P_1) \left[\int_{\Omega} K(P_1, P)\, \varphi_i(P) \rho(P)\, dP \right] \rho(P_1) dP_1 =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i} \int_{\Omega} K(P_0, P_1)\, \varphi_i(P_1)\, \rho(P_1)\, dP_1 = \frac{1}{\lambda_i^2}\, \varphi_i(P_0).$$

Aceasta înseamnă,

$$K_2(P_0, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P_0)\varphi_i(P)}{\lambda_i^2}. \qquad \text{(XXV.22)}$$

Cu atît mai mult convergența are loc pentru nuclee K_m, unde $m \geqslant 2$; pentru aceste nuclee are loc, evident, formula

$$K_m(P_0, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P_0)\varphi_i(P)}{\lambda_i^m}.$$

Putem arăta, deși noi nu vom face aceasta, că convergența seriei bilinare (XXV.22) este uniformă în raport cu ambele variabile.

Teorema lui Hilbert-Schmidt este evident valabilă pentru nucleele continue, oricare ar fi ponderea lor mărginită și măsurabilă. Nu este greu să ne convingem de faptul că aceasta este va-

labilă şi pentru toate nucleele aproape regulate. Într-adevăr, pentru asemenea nuclee

$$\int_\Omega (K(P_0, P))^2 \rho(P)\, dP \leqslant \int_\Omega \frac{A^2}{r^{n-2\alpha}} \rho(P)\, dP < M,$$

cceea ce este de altfel necesar în ipotezele teoremei lui Hilbert-Schmidt.

Teorema lui Hilbert-Schmidt se extinde direct la toate nucleele de tipul funcţiei lui Green, pentru două sau trei variabile independente. Într-adevăr, asemenea nuclee, care au singularităţile $\lg \frac{1}{r}$ sau $\frac{1}{r}$, sînt evident aproape regulate.

Să considerăm integrala

$$d_N = \int_\Omega \int_\Omega \left[K(P, P_1) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i} \right]^2 \rho(P)\, \rho(P_1)\, dP\, dP_1.$$

Cîteva transformări simple ne dau

$$d_N = \int_\Omega \int_\Omega [K(P, P_1)]^2 \rho(P)\, \rho(P_1)\, dP\, dP_1 -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \int_\Omega K(P, P_1) \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i} \rho(P)\, \rho(P_1)\, dP\, dP_1 +$$

$$+ \int_\Omega \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)\varphi_i^2(P_1)}{\lambda_i^2} \rho(P)\, \rho(P_1)\, dP\, dP_1 =$$

$$= \int_\Omega \left[\int_\Omega [K(P, P_1)]^2 \rho(P_1)\, dP_1 - 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} \right] \rho(P) dP =$$

$$= \int_\Omega \left[K_2(P, P) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} \right] \rho(P)\, dP.$$

Este evident că $d_N > 0$. Conform celor demonstrate mai sus, seria $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2}$ converge către funcţia $K_2(P, P)$.

În baza lemei 7 din lecţia VI, putem afirma că şirul nedescrescător de funcţii $\sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2}$ avînd o integrală mărginită, tinde aproape peste tot către funcţia

limită, fiind posibilă trecerea la limită sub semnul integral. Această funcţie limită nu poate fi alta decît $K_2(P, P)$, de unde rezultă că $\lim d_N = 0$.

Rezultatul obţinut ne dă o importantă teoremă.

Teorema 7. Seria biliniară pentru un nucleu continuu converge în medie către acest nucleu în raport cu ambele variabile.

Există o teoremă, aparţinînd lui Mercer, cu enunţul următor:

Seria biliniară a oricărui nucleu continuu şi pozitiv definit, cu alte cuvinte a oricărui nucleu care admite numai valori proprii pozitive, este totdeauna uniform convergentă.

Nu vom demonstra nici această teoremă, din care rezultă convergenţa uniformă a lui (XXV.22) în raport cu ambele variabile.

§ 3. Fundamentarea metodei lui Fourier pentru rezolvarea problemelor la limită din fizica matematică

Ne putem întoarce acum la afirmaţiile lăsate de noi fără demonstraţie la expunerea metodei lui Fourier din lecţia XXIII. Vom demonstra cele cinci proprietăţi fundamentale ale sistemelor de funcţii proprii formulate în lecţia XXIII la § 1.

După cum am văzut, funcţiile proprii ale problemelor la limită reprezintă pentru ecuaţia (XXIII.7) soluţiei ecuaţiei integrale (XXIII.9) cu nucleu simetric real şi aproape regulat.

De aici, rezultă că valorile proprii λ_i vor fi reale. Vom arăta ceva mai jos că există o infinitate de valori proprii şi că printre ele nu există numere negative.

Mai departe, funcţiile proprii, conform celor demonstrate mai sus, pot fi considerate ortogonale şi normate.

Va fi util să analizăm separat cîteva proprietăţi ale funcţiilor proprii pentru diferite probleme la limită. Să considerăm pentru început prima problemă la limită.

Am arătat că funcţiile U_i, soluţii ale ecuaţiei

$$\Delta U_i + \lambda_i U_i = 0, \qquad \text{(XXV.23)}$$

care satisfac condiţiile

$$U_i|_S = 0, \qquad \text{(XXV.24)}$$

sînt soluţiile ecuaţiei integrale

$$U_i = \lambda_i \int_\Omega \int_\Omega \int G U_i\, d\Omega. \qquad \text{(XXV.25)}$$

Să demonstrăm acum afirmaţia reciprocă; orice soluţie a ecuaţiei integrale (XXV.25) admite derivate continue pînă la ordinul al doilea inclusiv în interiorul domeniului, satisface

peste tot inclusiv frontiera ecuaţia (XXV.23) şi condiţia la limită (XXV.24).

Într-adevăr, să considerăm ecuaţia lui Poisson

$$\Delta u = -\lambda_i U_i, \qquad \text{(XXV.26)}$$

avînd în membrul drept o soluţie a ecuaţiei integrale (XXV.25) care va fi mărginită în conformitate cu proprietatea soluţiilor ecuaţiilor integrale cu nucleu simetric aproape regulat demonstrată anterior. Vom căuta soluţia acestei ecuaţii, care satisface condiţia

$$u|_S = 0. \qquad \text{(XXV.27)}$$

O asemenea soluţie poate fi construită în două etape. Vom considera înainte de toate potenţialul newtonian cu densitatea $\frac{\lambda_i U_i}{4\pi}$:

$$Q(P_0) = \frac{\lambda_i}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{U_i}{r}\, d\Omega. \qquad \text{(XXV.28)}$$

Acest potenţial are în tot spaţiul un laplacian mărginit ΔQ şi derivate continue de ordinul întîi. Funcţia u, care satisface ecuaţia (XXV.26) şi condiţia (XXV.27), va reprezenta suma

$$u(P_0) = Q(P_0) + w(P_0),$$

unde $w(P_0)$ este o funcţie armonică în domeniul Ω, luînd valorile $Q(S)$ pe frontiera S. O asemenea funcţie există. Prin urmare, există o soluţie u a ecuaţiei (XXV.26) cu condiţia (XXV.27), care posedă o derivată normală regulată. Conform lemei lui Liapunov, aceasta are o derivată normală regulată.

O asemenea soluţie, însă, aşa cum s-a demonstrat în lecţia XXI, poate fi scrisă sub forma

$$u(P_0) = \lambda_i \iiint_\Omega G(P_0, P)\, U_i(P)\, dP. \qquad \text{(XXV.29)}$$

Prin urmare, membrul drept al egalităţii (XXV.29) este continuu şi admite o derivată normală regulată. În baza ecuaţiei (XXV. 25) însă, acest membru drept este egal cu $U_i(P_0)$. Înseamnă că funcţia $U_i(P_0)$ coincide cu funcţia $u(P_0)$ şi de aceea este continuă, admite o derivată normală regulată şi satisface ecuaţia (XXV.23) şi condiţia (XXV. 24).

Să trecem acum la analizarea funcţiilor proprii a celei a doua probleme la limită. Am demonstrat că orice funcţie mărginită V_i, care satisface ecuaţia

$$\Delta V_i + \lambda_i V_i = 0 \qquad \text{(XXV.30)}$$

şi condiţia la limită

$$\left.\frac{\partial V_i}{\partial n}\right|_S = 0, \qquad \text{(XXV.31)}$$

derivata fiind înţeleasă ca o derivată normală regulată, va fi o soluţie a ecuaţiei integrale

$$V_i(P_0) = \lambda_i \iiint_\Omega G^*(P_0, P) V_i(P)\, dP, \qquad \text{(XXV.32)}$$

unde $G^*(P_0, P)$ este funcţie generalizată a lui Green pentru problema lui Neumann. Să demonstrăm afirmaţia reciprocă.

Vom căuta soluţia ecuaţiei

$$\Delta v = -\lambda_i V_i \qquad \text{(XXV.33)}$$

cu condiţia

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0. \qquad \text{(XXV.34)}$$

O asemenea soluţie există, deoarece funcţia V_i este ortogonală cu o constantă, adică este ortogonală cu soluţia problemei omogene a lui Neumann. Pentru a căuta soluţia necesară, vom forma la început potenţialul newtonian

$$R(P_0) = \frac{\lambda_i}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{V_i}{r}\, d\Omega. \qquad \text{(XXV.35)}$$

Acest potenţial, datorită faptului că V_i este mărginit, va avea peste tot derivate de ordinul întîi, continue, satisfăcînd condiţia lui Liapunov.

Mai departe, funcţia v va putea fi scrisă sub forma

$$v(P_0) = R(P_0) + s(P_0), \qquad \text{(XXV.36)}$$

unde $s(P_0)$ este o funcţie armonică ce satisface condiţia,

$$\left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_S = -\left.\frac{\partial R}{\partial n}\right|_S.$$

Însă, $\left.\frac{\partial R}{\partial n}\right|_S$ este o funcţie continuă pe suprafaţa S, care satisface condiţia lui Liapunov. În baza teoremei 3, lecţia XXI, XXI, funcţia s se va putea pune sub forma unui potenţial de simplu strat, a cărui densitate va satisface la rîndul său condiţia lui Liapunov. Conform teoremei 4 din lecţia XXI, funcţia posedă o derivată normală regulată.

Am demonstrat în lecţia XXI că soluţia ecuaţiei (XXV.33) cu condiţiile (XXV.34) poate fi pusă sub forma

$$v(P_0) = \lambda_i \iiint_\Omega G^*(P_0, P) V_i(P)\, dP. \qquad \text{(XXV.37)}$$

Prin urmare, funcţia $v(P_0)$ coincide cu funcţia V_i. Datorită acestui fapt, V_i are o derivată normală regulată care se anulează pe frontieră şi care satisface ecuaţia (XXV.30).

Pentru a termina demonstraţia proprietăţii 1, ne rămîne să arătăm că printre valorile proprii λ_i ale nucleului, care este o funcţie Green, nu există numere negative.

Folosindu-ne de ecuaţia (XXIII.7), vom avea

$$\int_\Omega U_i \Delta U_i\, dx\, dy\, dz = -\lambda_i \int_\Omega U_i^2\, dx\, dy\, dz = -\lambda_i. \qquad \text{(XXV.38)}$$

Pe de altă parte, conform formulei lui Green, folosindu-ne de faptul că U_i este mărginit şi că derivatele sale normale sînt regulate, obţinem

$$\int_\Omega U_i \Delta U_i\, dx\, dy\, dz =$$

$$= -\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz + \int_S U_i \frac{\partial U_i}{\partial n}\, dS. \qquad \text{(XXV.39)}$$

Dacă însă $U_i|_S = 0$ sau $\left.\frac{\partial U_i}{\partial n}\right|_S = 0$, atunci, ultimul termen, care conţine integrala de suprafaţă, se anulează şi obţinem

$$\lambda_i = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz \geqslant 0, \qquad \text{(XXV.40)}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să demonstrăm cea de a treia proprietate a sistemului de funcţii proprii, proprietatea de a fi complet. Fie φ o funcţie arbitrară, satisfăcînd pe frontiera domeniului condiţia $\varphi|_S = 0$ sau $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = 0$ şi avînd peste tot derivate de ordinul al doilea continue. Dacă punem

$$\Delta\varphi = 4\pi\psi,$$

atunci ψ este o funcţie continuă în domeniul închis Ω. Conform proprietăţii funcţiei lui Green,

$$\varphi = \int_\Omega G(P_0, P)\, \psi(P)\, dP.$$

Astfel funcţia φ este reprezentabilă prin surse cu ajutorul nucleului şi, prin urmare, se dezvoltă într-o serie uniform convergentă după funcţiile proprii. Sistemul funcţiilor proprii este deci complet în raport cu orice funcţie φ de două ori continuu derivabilă şi satisfăcînd condiţiile la limită. Cu ajutorul acestor funcţii putem, evident, reprezenta aproximativ în medie orice funcţie de pătrat integrabil în domeniul Ω.

Aşa cum am arătat mai înainte (v. lema 3, § 1) cea mai bună aproximaţie în medie pentru funcţia dată este suma parţială a seriei Fourier. De aceea, sumele parţiale ale seriei Fourier ne permit de asemenea să aproximăm în medie orice funcţie de pătrat integrabil pe domeniul Ω. Prin urmare, orice funcţie f de pătrat integrabil în domeniul Ω se dezvoltă într-o serie Fourier după funcţiile proprii, convergentă în medie. Proprietatea 3 este demonstrată. De aici, rezultă, între altele, că există o infinitate de funcţii proprii (U_i), deoarece, altfel, ele n-ar putea alcătui un sistem complet.

Să demonstrăm acum proprietatea 4. Fie U_i, U_j două funcţii proprii. Integrînd prin părţi şi folosind condiţiile la limită, avem

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial U_i}{\partial y}\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial z}\frac{\partial U_j}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= -\iiint_\Omega U_i \Delta U_j\, dx\, dy\, dz + \iint_S U_i \frac{\partial U_j}{\partial n}\, dS =$$

$$= \lambda_j \int_\Omega U_i U_j\, dx\, dy\, dz, \qquad \text{(XXV.41)}$$

de unde rezultă proprietatea de demonstrat.

Ne-a rămas să stabilim, încă, proprietatea 5. În acest scop vom considera integrala J

$$\iiint_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \varphi_N) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\varphi - \varphi_N) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\varphi - \varphi_N) \right]^2 \right\} dx\, dy\, dz, \qquad \text{(XXV.42)}$$

în care $\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i$, iar mărimile a_i sînt coeficienţii Fourier ai funcţiei φ pentru sistemul $\{U_i\}$. Desfăcînd parantezele şi integrînd, la fel cum am procedat la demonstrarea inegalităţii lui Bessel, obţinem utilizînd proprietatea 4:

$$J = \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz - 2 \sum_{i=1}^{N} a_i \iiint_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial U_i}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i^2. \qquad \text{(XXV.43)}$$

Este uşor de demonstrat egalitatea

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial U_i}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \lambda_i a_i.$$

Într-adevăr, integrînd prin părţi, obţinem

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial U_i}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$= - \iiint_\Omega \varphi\, \Delta U_i\, dx\, dy\, dz = \lambda_i \iiint_\Omega \varphi U_i\, dx\, dy\, dz = \lambda_i a_i.$$

Astfel, din (XXV.43), avem

$$\iiint_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \varphi_N) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\varphi - \varphi_N) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\varphi - \varphi_N) \right]^2 \right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i^2.$$

Membrul stîng al ultimei egalităţi este negativ, şi obţinem o inegalitate analogă inegalităţii lui Bessel

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i^2 \leqslant \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz.$$

Această inegalitate demonstrează că seria

$$\sum \lambda_i a_i^2$$

este convergentă. De aici, rezultă convergenţa în medie a seriilor

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{\partial U_i}{\partial y}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{\partial U_i}{\partial z}.$$

Într-adevăr, să considerăm integrala

$$\iiint_\Omega \left[\left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz.$$

Dacă vom stabili că această integrală este oricît de mică vrem pentru un n suficient de mare şi oricare ar fi p, atunci, de aici, va rezulta convergenţa care ne interesează. Putem calcula această integrală direct, folosind proprietatea 4. Acest calcul ne dă

$$\iiint_\Omega \left[\left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\sum_{i=n}^{n+p} a_i \frac{\partial U_i}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_\Omega \left\{ \sum_{i=n}^{n+p} a_i^2 \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx\, dy\, dz +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{i,j=n \\ i \neq j}}^{n+p} a_i a_j \iiint_\Omega \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial U_i}{\partial y} \frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial z} \frac{\partial U_j}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \sum_{i=n}^{n+p} \lambda_i a_i^2.$$

Din convergenţa seriei $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2$ rezultă, în baza criteriului lui Cauchy, faptul că ultima sumă este oricît de mică vrem,

pentru un n suficient de mare. Am arătat că seriile obţinute prin derivarea termen cu termen, în raport cu x, y, şi z a seriei

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z),$$

converg în medie.

Pentru a termina demonstraţia proprietăţii 5, ne rămîne să stabilim încă o teoremă.

Teorema 8. *Dacă seria* $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ *(avînd în domeniul* Ω *termeni continuu derivabili) este uniform convergentă şi suma seriei are o derivată parţială continuă în raport cu* x, *iar seria obţinută prin derivare termen cu termen*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial v_i}{\partial x}$$

converge în medie, atunci seria $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ *poate fi derivată termen cu termen, adică*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial v_i}{\partial x}, \qquad \text{(XXV.44)}$$

în care convergenţa se înţelege evident ca o convergneţă în medie.

Demonstraţie. Fie ψ o funcţie arbitrară continuă derivabilă de variabilele x, y, z, diferită de zero numai într-un domeniu $\Omega\psi$ care se găseşte în întregime în interiorul domeniului Ω. Atunci, este valabilă formula integrării prin părţi

$$\iiint_{\Omega} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx\, dy\, dz = 0, \qquad \text{(XXV.45)}$$

în care χ este o funcţie arbitrară care admite o derivată continuă.

În particular,

$$\iiint_{\Omega} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx\, dy\, dz = 0. \qquad \text{(XXV.46)}$$

Să introducem acum în formula (XXV.45) funcţia $\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} v_i$ în locul funcţiei χ. Vom avea

$$\iiint_{\Omega} \left(\psi \frac{\partial \varphi_N}{\partial x} + \varphi_N \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx\, dy\, dz = 0.$$

În această formulă este posibilă trecerea la limită pentru $N \to \infty$. Să notăm cu φ' suma seriei

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial v_i}{\partial x}.$$

Conform ipotezei din teoremă, această sumă există. Vom obţine

$$\iiint_{\Omega} \left(\psi\varphi' + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Scăzînd această egalitate din (XXV.46), vom avea

$$\iiint_{\Omega} \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi' \right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Ultima egalitate trebuie să aibă loc, oricare ar fi funcţia supusă numai condiţiilor indicate mai sus. De aici,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial v_i}{\partial x},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

§ 4. Aplicarea teoriei ecuaţiilor integrale cu nucleu simetric

Una din aplicaţiile cele mai importante ale teoriei ecuaţiilor integrale cu nucleu simetric este teoria aşa-numitelor *ecuaţii Sturm-Liouville*, adică teoria *ecuaţiilor diferenţiale ordinare*

$$(py')' + ry + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad \text{(XXV.47)}$$

care depind de parametrul λ *cu anumite condiţii la limită.*

Vom căuta soluţia unei asemenea ecuaţii, satisfăcînd condiţiile omogene

$$[py' + \alpha y]_{x=0} = 0,$$
$$[py' + \beta y]_{x=1} = 0. \qquad \text{(XXV.48)}$$

Presupunînd că pentru $\lambda = 0$ problema omogenă admite numai o soluţie banală şi aplicînd formula lui Green, vom avea

$$y(x_0) = -\int_0^1 \lambda G(x, x_0)\, y(x)\, \rho(x)\, dx. \qquad \text{(XXV.49)}$$

Nucleul $G(x, x_0)$ va fi simetric în baza faptului că operatorul L_2 ca şi condiţiile la limită sînt autoadjuncţi.

Prin urmare, funcţiile proprii ale problemei lui Sturm-Liouville, cu alte cuvinte, funcţiile care satisfac sistemul (XXV.47) şi (XXV.48) vor fi funcţiile proprii ale ecuaţiei integrale (XXV.49) cu nucleu simetric încărcat şi se vor bucura de toate proprietăţile funcţiilor proprii ale unor asemenea ecuaţii. Este uşor să stabilim şi reciproca : orice soluţie a ecuaţiei (XXV.49) va satisface ecuaţia diferenţială (XXV.47) şi condiţiile la limite (XXV.48). Această verificare o lăsăm în seama cititorilor.

Drept exemplu de ecuaţie mai generală cu singularitate, să considerăm ecuaţia de forma

$$(xy')' - \frac{m^2}{x}\, y + \lambda x y = 0,$$

sau

$$xy'' + y' + x\left(\lambda - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Funcţia lui Green pentru această ecuaţie a fost construită de noi mai sus [v. (XX.52)]. Pentru această ecuaţie, numită *ecuaţia lui Bessel*, este valabilă întreaga teorie expusă.

LECŢIA XXVI

ECUAŢIA INTEGRALĂ NEOMOGENĂ CU NUCLEU SIMETRIC

§ 1. Descompunerea rezolventei

În lecţiile precedente am studiat amănunţit ecuaţia integrală omogenă de tip Fredholm cu nucleu simetric. În această lecţie vom studia ecuaţia neomogenă din punctul de vedere al teoriei dezvoltate mai sus.

Am lămurit mai sus în ce mod poate fi reprezentat nucleul simetric al unei ecuaţii integrale cunoscînd valorile şi funcţiile sale proprii. În mod analog putem da o reprezentare a soluţiei ecuaţiei neomogene cu ajutorul aceloraşi valori şi funcţii proprii.

Într-adevăr, să aplicăm ecuaţiei integrale neomogene cu nucleu simetric, teorema lui Hilbert-Schmidt.

Vom avea

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \int_\Omega K(P, P_1)\, \mu(P_1)\, dP_1$$

(pentru simplicitate considerăm $\rho = 1$).

Să presupunem că λ nu este o valoare proprie. Atunci, soluţia ecuaţiei există. Să găsim expresia acestei soluţii exprimată cu ajutorul funcţiilor proprii.

Este evident că funcţiunea $\mu(P) - f(P)$ este reprezentabilă prin surse cu ajutorul nucleului. Prin urmare,

$$\mu(P) - f(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}, \qquad \text{(XXVI.1)}$$

în care

$$\mu_i = \int_\Omega \mu(P)\, \varphi_i(P)\, dP.$$

Pe de altă parte, înmulțind ambii membri din (XXVI.1) cu $\varphi_i(P)$ și integrînd, obținem

$$\mu_i - f_i = \frac{\lambda \mu_i}{\lambda_i},$$

de unde

$$\mu_i = \frac{f_i}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}} = \frac{\lambda_i f_i}{\lambda_i - \lambda}.$$

Prin urmare, funcția μ, dacă există, poate fi reprezentată sub forma

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(P). \qquad \text{(XXVI.2)}$$

Dacă introducem acum expresia lui f_i cu ajutorul funcțiilor proprii și înlocuim seria prin limita sumei sale parțiale, obținem

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \lim_{N \to \infty} \int_{\Omega} f(P_1) \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(P_1)}{\lambda_i - \lambda} dP_1.$$

Să arătăm că formula obținută ne dă, într-adevăr, soluția problemei. Pentru aceasta este comod să introducem o nouă funcție

$$\Gamma(P, P_1, \lambda)$$

prin formula

$$\Gamma(P, P_1, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(P_1)}{\lambda_i - \lambda}. \qquad \text{(XXVI.3)}$$

Este ușor de demonstrat convergența în medie a seriei scrise pentru orice λ, excluzînd valorile proprii λ_i. Pentru aceasta, observăm că seria pentru rezolventă, scrisă mai sus, poate fi pusă și sub altă formă. Avem,

$$\Gamma(P, P_1, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(P)\, \varphi_i(P_1) \left[\frac{1}{\lambda_i} + \left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(P_1)}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(P_1)}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)},$$

sau

$$\Gamma(P, P', \lambda) = K(P, P') + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(P')}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(P')}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(P')}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)}, \qquad \text{(XXVI.4)}$$

în care seria din cel de-al doilea termen este uniform convergentă.

Condiția necesară și suficientă pentru ca seria (XXVI.3) să fie uniform convergentă, constă evident în convergența uniformă a seriei biliniare pentru nucleu.

Observație. După cum vedem, rezolventa ecuației integrale cu nucleu simetric este o funcție meromorfă în planul complex al parametrului λ. Toți polii acestei funcții sînt simpli, fiind valorile proprii ale nucleului.

Folosindu-ne de convergența demonstrată a seriei lui $\Gamma(P, P_1, \lambda)$ putem permite ordinea însumării și integrării în formula

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) f(P_1)\, dP,$$

care are sens, conform celor demonstrate. Aplicînd ambilor membri operația integrală cu nucleul $K(P_0, P)$ ne putem convinge că $\mu(P)$ satisface într-adevăr ecuația integrală

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \int_{\Omega} K(P, P_1)\, \mu(P_1)\, dP_1.$$

§ 2. Reprezentarea soluției cu ajutorul funcțiilor analitice

Dezvoltarea în serie Fourier pe care am considerat-o în lecțiile precedente (lecția XXIII, § 2), a fost interpretată din punctul de vedere pur geometric, ca fiind reprezentarea unei anumite funcții, considerată în spațiul funcțional al noilor variabile, orientate după axele principale ale operatorului liniar.

Folosind rezolventa putem studia această problemă din alt punct de vedere. Să considerăm integrala

$$\chi(P, \lambda) = -\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) f(P_1)\, dP_1 = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda}.$$

Această integrală reprezintă o funcție meromorfă de parametrul λ, avînd poli simpli în punctele λ_i. Reziduurile acestor poli sînt $f_i \varphi_i(P)$ și deci termenii succesivi ai seriei Fourier. Seria Fourier a funcțiunii f reprezintă suma reziduurilor iar suma parțială a acestei serii este suma reziduurilor referitoare la o anumită parte a polilor.

De aceea putem reprezenta această sumă parțială sub forma

$$f_n(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \chi(P, \lambda)\, d\lambda,$$

în care C este un contur în planul variabilei complexe λ, care cuprinde primele n puncte singulare ale rezolventei.

Este din nou comod să trecem la scrierea simbolică.

Din formula (XXVI.2) putem exprima funcția $\chi(P, \lambda)$ sub forma

$$\chi(P, \lambda) = -\frac{\mu(P) - f(P)}{\lambda},$$

în care $\mu(P)$ este soluția ecuației

$$\mu(P) - \lambda \int_\Omega K(P, P_1)\, \mu(P_1)\, dP_1 = f(P),$$

adică a ecuației

$$(E - \lambda A)\, \mu = f.$$

Așa cum am văzut mai înainte, această soluție poate fi scrisă pentru valori mici ale lui λ sub forma seriei

$$\mu = (E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^m A^m + \ldots) f,$$

de unde, folosind aceeași scriere simbolică,

$$\chi = -\frac{\mu - f}{\lambda} = -(E - \lambda A)^{-1} A f.$$

Atunci,

$$f_n(P) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A}{E - \lambda A}\, f\, d\lambda. \qquad \text{(XXVI.5)}$$

Am văzut mai sus analogia dintre cîteva formule simbolice conținînd poli noame sau serii de puteri de operatorul A și formulele corespunzătoare ale algebrei obișnuite și ale Analizei.

Formula integrală (XXVI.5) obținută de noi, este de asemenea analogă formulei corespunzătoare din teoria funcțiilor. Într-adevăr, fie a și f niște numere oarecare. Să considerăm integrala

$$\psi = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a}{1 - \lambda a}\, f\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f}{\frac{1}{a} - \lambda}\, d\lambda. \qquad \text{(XXVI.6)}$$

Este evident că $\psi = f$, dacă conturul C conține în interiorul său punctul $\lambda_0 = \frac{1}{a}$ și $\psi = 0$ în caz contrar.

Formula (XXVI.5) generalizează formula (XXVI.6).

Numărul λ_0 satisface relația

$$\lambda_0 a \varphi_k = \varphi_k, \qquad \text{(XXVI.7}$$

în care φ_k este un număr oarecare diferit de zero.

Ecuația (XXVI.7) se transformă în ecuația (XXV.1) pentru determinarea lui λ_k, dacă înlocuim în ea numărul a cu operatorul A.

Să folosim formula (XXVI.7) pentru a obține o nouă soluție a problemelor fizicii-matematice, exprimată sub forma unei integrale definite.

Fără a intra în amănuntele teoriei acestei chestiuni, vom analiza exemplul din problema referitoare la propagarea căldurii, cu alte cuvinte vom analiza problema integrării ecuației

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{(XXVI.8)}$$

cu condițiile

$$u\big|_S = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(P).$$

Să repetăm, pe scurt, raționamentele obișnuite în metoda lui Fourier.

Aplicînd ecuației formula lui Green, vom avea

$$u = -\int_\Omega G(P, P_1)\, \frac{\partial u(P_1)}{\partial t}\, dP_1$$

au simbolic

$$u + A \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Soluțiile particulare ale acestei ecuații vor fi

$$u = e^{-\lambda_i t} u_i(P),$$

în care

$$u_i - \lambda_i A u_i = 0.$$

Suma soluțiilor particulare corespunzătoare diferitelor valori proprii λ_i, cu alte cuvinte, soluția sub forma seriei Fourier, va avea forma

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\, u_i(P). \qquad \text{(XXVI.9)}$$

Din condiția

$$u\big|_{t=0} = u_0$$

rezultă că $u_i(P)$ sînt termenii seriei Fourier ai funcției u_0 iar aceasta înseamnă că funcțiile u_i sînt reziduurile funcției

$$-\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda)\, u_0(P_1)\, dP_1$$

în polii rezolventei.

În același timp $e^{-\lambda_i t} u_i(P)$ sînt reziduurile în aceiași poli ai funcției

$$-e^{-\lambda t}\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda)\, u_0(P_1)\, dP_1,$$

iar suma parțială a seriei (XXVI.9) se reprezintă sub forma integralei

$$u_N = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} e^{-\lambda t}\left(\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda)\, u_0(P_1)\, dP_1\right) d\lambda, \qquad \text{(XXVI.10)}$$

care ne dă astfel soluția completă a problemei.

Putem scrie simbolic soluția problemei noastre sub forma

$$u_N = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} e^{-\lambda t}\,\frac{A}{E - \lambda A}\, u_0\, d\lambda. \qquad \text{(XXVI.11)}$$

Să comparăm soluția obținută de noi cu soluția ecuației ordinare $a\dfrac{\partial u}{\partial t} + u = 0$, în care a este o constantă.

Este evident,

$$u = e^{-\frac{1}{a}t} u_0. \qquad \text{(XXVI.12)}$$

În baza teoremei reziduurilor

$$u = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C} e^{-\lambda t}\,\frac{a u_0}{1 - \lambda a}\, d\lambda.$$

Această integrală este egală cu reziduul său în punctul $\lambda_0 = \dfrac{1}{a}$, dacă λ_0 se găsește în interiorul lui C, și este nulă dacă λ_0 se găsește în exteriorul acestui contur.

Bazați pe acestea, este comod să notăm simbolic

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C} e^{-\lambda t}\,\frac{A}{E - \lambda a}\, f_0\, dt$$

cu $e^{-\frac{t}{A}} f_0$.

Soluția ecuației (XXVI.8) se scrie atunci sub forma

$$u = e^{-\frac{t}{A}} u_0. \qquad \text{(XXVI.13)}$$

Teoria generală a funcțiilor de operatori, pe care nu avem posibilitatea să o dezvoltăm aci, ne permite să deducem o serie de generalizări ale acestei formule pentru o clasă considerabil mai largă de probleme ale fizicii-matematice.

Dezvoltarea acestei teorii ne dă posibilitatea să aplicăm metode analoge metodelor de rezolvare a problemelor din fizica-matematică într-o serie de cazuri cînd singularitățile rezolventei nu sînt puncte izolate în planul variabilei λ.

Aceste idei ne permit, în particular, să studiem soluția problemelor din fizica-matematică în domeniul nelimitate, sau probleme în care ecuațiile considerate au singularități în domeniul de studiat. Adesea, apariția unor astfel de singularități este legată de modificarea caracterului analitic al rezolventei, ducînd la rîndul său la singularități ale rezolventei care nu sînt numai poli.

În capitolele următoare nu vom adînci această chestiune, ci ne vom ocupa de aplicarea concretă a metodei lui Fourier în probleme particulare ale fizicii-matematice.

Exemplele pe care le vom considera sînt extrem de instructive, întrucît chiar de la ele a pornit dezvoltarea teoriei.

LECȚIA XXVII

VIBRAȚIILE PARALELIPIPEDULUI DREPTUNGHI

Ca exemplu de aplicare a metodei lui Fourier, vom considera, înainte de toate, vibrațiile unui paralelipiped dreptunghi.

Să punem această problemă în felul următor.

Vom căuta soluția ecuației

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(XXVII.1)}$$

în domeniul

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c$$

în condițiile la limită

$$u\,|_{x=0} = u\,|_{x=a} = u\,|_{y=0} = u\,|_{y=b} = u\,|_{z=0} = u\,|_{z=c} = 0 \qquad \text{(XXVII.2)}$$

și condițiile inițiale

$$u\,|_{t=0} = u_0(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x, y, z). \qquad \text{(XXVII.3)}$$

Conform teoriei generale [v. § 1, lecția XXIII] soluția va avea forma

$$u = \sum U_i(x, y, z)\,(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t), \qquad \text{(XXVII.4)}$$

în care U_i sînd soluțiile ecuației

$$\Delta U_i + \lambda_i^2 U_i = 0, \qquad \text{(XXVII.5)}$$

care satisfac condițiile (XXVII.2). În cazul de față aceste soluții pot fi exprimate sub formă finită cu ajutorul funcțiilor elementare, dacă ne folosim de metoda care se numește separarea completă a variabilelor. În acest scop, vom căuta soluția ecuației (XXVII.5) sub forma

$$U(x, y, z) = X_i(x)\, V_i(y, z),$$

în care X_i depinde numai de x, iar V_i nu depinde de x. Pentru determinarea funcțiilor X_i și V_i, vom obține

$$V_i X_i'' + X_i\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}\right) + \lambda_i^2 X_i Y_i = 0$$

sau

$$\frac{X_i''}{X_i} = \frac{\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}}{V_i} + \lambda_i^2 = 0.$$

Este evident

$$\frac{X_i''}{X_i} = -\varkappa_i^2, \quad \frac{\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}}{V_i} = -\tau_i^2,$$

unde $\varkappa_i$ și τ_i sînt constante legate prin relația

$$\varkappa_i^2 + \tau_i^2 = \lambda_i^2.$$

Ecuația

$$X_i'' + \varkappa_i^2 X_i = 0 \qquad \text{(XXVII.6)}$$

cu condițiile (XXVII.2) are ca valori proprii, numerele

$$\varkappa_i = \frac{k_i \pi}{a},$$

în care k_i sînt numere întregi.

Funcția

$$X_i = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{k_i \pi x}{a}$$

satisface ecuația (XXVII.6) și condițiile la limită pentru $x = 0$ și pentru $x = a$. Sistemul de soluții $\{X_i\}$ este un sistem de funcții ortonormale.

Considerînd ecuația

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z_i^2} = \tau_i^2 V_i = 0,$$

căutăm din nou soluția sa sub forma

$$V_i = Y_i(y)\, Z_i(z)$$

în care Y_i depinde numai de y iar Z_i depinde numai de z. Vom avea

$$\frac{Y_i''}{Y_i} + \frac{Z_i''}{Z_i} + \tau_i^2 = 0,$$

de unde, rezultă

$$\frac{Y_i''}{Y_i} = -\sigma_i^2, \quad \frac{Z_i''}{Z_i} = -\mu_i^2,$$

unde σ_i și μ_i sînt constante, satisfăcînd relația

$$\sigma_i^2 + \mu_i^2 = \tau_i^2.$$

Ecuația

$$Y_i'' + \sigma_i^2 Y_i = 0$$

are valori proprii

$$\sigma_i = \frac{l_i \pi}{b},$$

în care l_i sînt numere întregi, iar funcțiile proprii sînt

$$Y_i = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi l_i}{b} y.$$

Ecuația

$$Z_i'' + \mu_i^2 Z_i = 0$$

are valorile proprii

$$\mu_i = \frac{m_i \pi}{c},$$

în care m_i sînt numere întregi, iar funcțiile proprii sînt

$$Z_i = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{\pi m_i}{c} z.$$

În definitiv, obținem mulțimea de funcții proprii pentru vibrațiile paralelipipedului, sub forma

$$U_i = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c}. \qquad \text{(XXVII.7)}$$

Aceste funcții proprii corespund următoarelor valori proprii ale ecuației (XXVII.5) cu condițiile la limită (XXVII.2):

$$\lambda_i^2 = \pi^2 \left(\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2} + \frac{m_i^2}{c^2} \right), \qquad \text{(XXVII.8)}$$

în care k_i, l_i, m_i parcurg mulțimea numerelor întregi. Să observăm că numerele λ_i se pot repeta, adică se poate întîmpla ca

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+k}.$$

Numărul valorilor proprii λ_i egale între ele este egal cu numărul soluțiilor în numere întregi ale ecuației (XXVII.8) relative la k_i, l_i, m_i.

Putem demonstra că nu mai există alte valori proprii sau funcții proprii ale ecuației (XXVII.5) cu condițiile (XXVII.2).

Pentru aceasta să stabilim următoarea lemă.

L e m a 1. *Orice funcție $\varphi(x, y, z)$ care satisface condițiile* (XXVII.2) *și care are derivate de ordinul al doilea continue* [1]), *poate fi reprezentată cu ajutorul seriei convergente*

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k x}{a} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sin \frac{\pi l y}{b} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,l,m} \sin \frac{\pi m z}{c} \right) \right], \qquad \text{(XXVII.9)}$$

în care seriile

$$\varphi_{k,l}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,l,m} \sin \frac{\pi m z}{c},$$

$$\varphi_k(y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{k,l}(z) \sin \frac{\pi l y}{b},$$

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_k(y, z) \sin \frac{\pi k x}{a}$$

[1]) Derivatele de ordinul al doilea sînt necesare aici numai pentru faptul că ne referim la teorema dezvoltării după funcțiile proprii.

sînt uniform convergente în raport cu argumentele care se află sub semnul sinus. Aici,

$$\varphi_{k,l,m} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{abc}} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y, z) \sin \frac{\pi k x}{a} \sin \frac{\pi l y}{b} \sin \frac{\pi m z}{c}\, dx\, dy\, dz. \quad \text{(XXVII.10)}$$

Vom considera la început pe $\varphi(x, y, z)$ ca fiind o funcție de variabila x și avînd parametrii y și z. Datorită faptului că pentru ecuația (XXVII.6) și pentru condițiile la limită date a fost construită funcția lui Green [v. § 3(XX)], putem reprezenta folosind teorema lui Hilbert-Schmidt, funcția $\varphi(x, y, z)$ sub forma unei serii uniform convergente în raport cu x după funcțiile proprii ale ecuației (XXVII.6), adică

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y, z) \sin \frac{\pi k x}{a},$$

în care

$$\varphi_k(y, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \varphi(x_1, y, z) \sin \frac{k\pi x_1}{a}\, dx_1. \quad \text{(XXVII.11)}$$

Din formula (XXVII.11) se vede că $\varphi_k(y, z)$ este o funcție continuă de y, z, admițînd derivate de ordinul al doilea și satisfăcînd în raport cu aceste variabile condițiile (XXVII.2). Prin urmare, $\varphi_k(y, z)$ se poate reprezenta cu ajutorul unei serii uniform convergente în raport cu y

$$\varphi_k(y, z) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{k,l}(z) \sin \frac{\pi l y}{b},$$

în care

$$\varphi_{k,l}(z) = \sqrt{\frac{2}{b}} \int_0^b \varphi_k(y_1, z) \sin \frac{\pi l y_1}{b}\, dy_1.$$

Însfîrșit $\varphi_{k,l}(z)$ poate fi dezvoltată într-o serie uniform convergentă în raport cu variabila z

$$\varphi_{k,l}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,l,m} \sin \frac{\pi m z}{c},$$

în care

$$\varphi_{k,l,m} = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c \varphi_{k,l}(z_1) \sin \frac{\pi m z_1}{b}\, dz_1.$$

Comparînd formulele pentru $\varphi_k(y, z)$, $\varphi_{k,l}(z)$ și $\varphi_{k,l,m}$ și seriile funcțiilor $\varphi(x, y, z)$, $\varphi_k(y, z)$ și $\varphi_{k,l,m}$ obținem concluzia lemei.

Să presupunem acum că U_0 este o funcție proprie oarecare a ecuației (XXVII.5) cu condițiile (XXVII.2). Conform celor demonstrate în lecția (XXIV), aceasta poate fi considerată ortogonală cu toate funcțiile (XXVII.7). Conform lemei, aceasta poate fi dezvoltată într-o serie (XXVII.9). Din formula (XXVII.10) rezultă că toți coeficienții unei astfel de dezvoltări vor fi nuli. Formula (XXVII.9) ne dă

$$U_0 = 0.$$

Prin urmare, problema noastră nu poate avea nici un fel de alte funcții proprii diferite de (XVII.7).

Exact la fel cum am considerat condiția (XXVII.2), am fi putut considera o condiție de alt tip, de exemplu

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = 0, \quad \text{(XXVII.12)}$$

în care α și β iau valori constante pe fiecare din fețe.

În baza teoriei generale expuse mai sus, ajungem la concluzia că problema propusă se rezolvă complet cu ajutorul metodei lui Fourier, astfel încît să poată fi satisfăcute toate condițiile inițiale și toate condițiile la limită, prin alegerea corespunzătoare a coeficienților dezvoltării soluției în serie, după funcțiile proprii (XXVII.7).

Vibrațiile membranei dreptunghiulare se studiază cu ajutorul aceleiași metode ca și vibrațiile paralelipipedului.

Este util să semnalăm următoarea împrejurare. Să presupunem că în formula (XXVII.12), coeficienții α și β nu sînt constanți. Atunci, în general, dezvoltarea funcțiilor proprii U_i în produsul $X_i\, Y_i\, Z_i$, nu va avea loc. Apare chestiunea: este posibil să facem o anumită schimbare de variabile independente, introducînd în locul lui x, y, z coordonate noi t_1, t_2, t_3, astfel încît o asemenea reprezentare să aibă loc? Coordonatele în care este posibilă separarea variabilelor pentru problema dată

din fizica-matematică se numesc, uneori, ***coordonate normale***. Putem pune problema: există coordonate normale pentru problema propusă și, dacă există, cum le putem găsi?

Vom indica în lecția următoare asemenea coordonate normale, pentru unele probleme speciale ale fizicii-matematice. Așa cum a demonstrat V. V. Stepanov, coordonatele normale există pentru o clasă foarte limitată de probleme.

LECȚIA XXVIII

ECUAȚIA LUI LAPLACE ÎN COORDONATE CURBILINII. EXEMPLE DE APLICARE A METODEI LUI FOURIER

§ 1. Ecuația lui Laplace în coordonate curbilinii

În fizica-matematică se consideră adesea diferite coordonate curbilinii: sferice, cilindrice etc. Să vedem cum se va înfățișa în aceste coordonate ecuația lui Laplace.

Să presupunem că notăm cu t_1, t_2, t_3 aceste coordonate curbilinii legate de x, y, z prin formulele:

$$t_1 = t_1(x, y, z), \quad t_2 = t_2(x, y, z), \quad t_3 = t_3(x, y, z),$$

$$x = x(t_1, t_2, t_3), \quad y = y(t_1, t_2, t_3), \quad z = z(t_1, t_2, t_3).$$

Să considerăm două curbe oarecare

$$x_1(s_1), \quad y_1(s_1), \quad z_1(s_1);$$

$$x_2(s_2), \quad y_2(s_2), \quad z_2(s_2),$$

care trec prin același punct. Cosinusul unghiului dintre ele se determină, precum se știe din geometria diferențială, cu ajutorul formulei

$$\cos\varphi = \frac{dx_1}{ds_1}\frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy_1}{ds_1}\frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz_1}{ds_1}\frac{dz_2}{ds_2}.$$

În noile coordonate, această formulă ia forma

$$\cos\varphi = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j} + \frac{\partial y}{\partial t_i}\frac{\partial y}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial t_i}\frac{\partial z}{\partial t_j}\right)\frac{dt_i^{(1)}}{ds_1}\frac{dt_j^{(2)}}{ds_2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\frac{dt_i^{(1)}}{ds_1}\frac{dt_j^{(2)}}{ds_2},$$

sau

$$\cos\varphi\, ds_1\, ds_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, dt_i^{(1)}\, dt_j^{(2)}, \qquad \text{(XXVIII.1)}$$

în care $dt_i^{(1)}$ și $dt_j^{(2)}$ sînt diferențialele considerate respectiv de-a lungul fiecăreia din curbele considerate.

Observăm

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \frac{\partial x}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j} + \frac{\partial y}{\partial t_i}\frac{\partial y}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial t_i}\frac{\partial z}{\partial t_j}.$$

Dacă ambele linii coincid, atunci formula (XXVIII.1) ia forma

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, dt_i\, dt_j. \qquad \text{(XXVIII.2)}$$

Pentru deducerea ecuației lui Laplace, precum și în alte chestiuni legate de coordonatele curbilinii, este comod să exprimăm toate formulele cu ajutorul coeficienților α_{ij}.

Dacă sistemul de coordonate t_1, t_2, t_3 este ortogonal, adică curbele coordonate formează între ele unghiuri drepte, atunci toți $\alpha_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$. Într-adevăr, să determinăm cu ajutorul formulei (XXVIII.1) unghiul dintre două curbe coordonate. Pe una din curbele coordonate avem numai $dt_i^{(1)} \neq 0$, pe cealaltă curbă numai $dt_j^{(2)} \neq 0$, $i \neq j$; atunci, în produsele $dt_i^{(1)}\, dt_j^{(2)}$ din formula (XXVIII.1) va rămîne numai un singur termen diferit de zero. Conform condiției însă, $\cos\varphi = 0$, prin urmare $\alpha_{ij} = 0$. Limitîndu-ne la cazul de ortogonalitate, vom pune

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} h_i^2, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Cu acestea, avem

$$ds^2 = h_1^2\, dt_1^2 + h_2^2\, dt_2^2 + h_3^2\, dt_3^2.$$

Exemple.

1. Pentru coordonatele sferice în spațiu

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta,$$

de unde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

2. Pentru coordonatele cilindrice, obținem

$$x = r\cdot\cos\varphi,\quad y = r\cdot\sin\varphi,\quad z = z$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2.$$

Este util să calculăm determinantul transformării $\frac{D(x, y, z)}{D(t_1, t_2, t_3)}$ cu ajutorul aceloraşi mărimi h_1, h_2, h_3. Pentru aceasta vom introduce încă un sistem de coordonate intermediare x_1, y_1, z_1, care se deosebesc numai printr-o rotație a axelor de x, y, z. Alegem direcțiile x_1, y_1, z_1, astfel încît acestea să coincidă în punctul dat x, y, z cu direcțiile t_1, t_2, t_3. Avem, în punctul considerat,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_1, y_1, z_1)}\,\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \pm\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)}$$

deoarece în acest punct $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_1, y_1, z_1)} = \pm 1$, semnul fiind determinat de orientarea sistemului de coordonate (x_1, y_1, z_1).

De aici,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \pm\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial z_1}{\partial t_1} & \frac{\partial z_1}{\partial t_2} & \frac{\partial z_1}{\partial t_3} \end{vmatrix},$$

În determinantul $\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)}$ însă, toți termenii sînt nuli, înafara acelora care se găsesc pe diagonala principală, și deci

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\frac{\partial y_1}{\partial t_2}\frac{\partial z_1}{\partial t_3}.$$

Mai departe, pe axa x_1, și pe orice curbă tangentă la ea, în punctul considerat, avem

$$dx_1^2 = ds^2 = h_1^2\, dt_1^2,$$

pe axa y_1 și pe orice curbă tangentă la ea avem, analog

$$dy_1^2 = ds^2 = h_2^2\, dt_2^2,$$

și, însfîrșit, pe axa z_1 și pe curbele tangente la ea z_1

$$dz_1^2 = ds^2 = h_3^2\, dt_3^2,$$

de unde

$$\frac{\partial t_1}{\partial x_1} = \pm \frac{1}{h_1}, \quad \frac{\partial t_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial t_3}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial t_2}{\partial y_1} = \pm \frac{1}{h_2}, \quad \frac{\partial t_3}{\partial y_1} = 0; \quad \text{(XXVIII.3)}$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial t_2}{\partial z_1} = 0; \quad \frac{\partial t_3}{\partial z_1} = \pm \frac{1}{h_3}$$

și

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1} = \pm h_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t_2} = 0, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t_3} = 0;$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial t_2} = \pm h_2, \quad \frac{\partial y_3}{\partial t_3} = 0;$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial t_2} = 0, \quad \frac{\partial z_3}{\partial t_3} = \pm h_3;$$

în definitiv, obținem

$$\frac{\partial (x_1, y_1, z_1)}{\partial (t_1, t_2, t_3)} = \pm h_1 h_2 h_3,$$

semnul fiind determinat de orientarea sistemelor de coordonate (x_1, y_1, z_1) și (t_1, t_2, t).

Am văzut mai sus că dacă operatorii L și M sînt unul adjunctul celuilalt, este valabilă relația integrală

$$\iiint_{\Omega} (u\,Lv - vMu)\, d\Omega = \iint_{S} [uP(v) - vQ(u)]\, dS,$$

în care Ω este un volum oarecare, mărginit de suprafața netedă S, iar $P(v)$ și $Q(u)$ sînt combinațiile liniare ale derivatelor funcțiilor v, u cu coeficienții care nu depind de v și u.

Dacă una din funcții, de exemplu, v, se anulează în exteriorul unui anumit domeniu Ω_v cuprins în întregime împreună cu frontiera sa în interiorul domeniulni Ω, atunci în această identitate se anulează integrala de suprafață și obținem

$$\iiint_{\Omega} (uLv - vMu)\, d\Omega = 0.$$

Această din urmă relație poate fi considerată ca definiția operatorului Mu, dacă vom cere ca ea să fie îndeplinită pentru

o funcție arbitrară u și pentru orice funcțiune v, diferită de zero numai într-un anumit domeniu interior Ω_v.

Înainte de a calcula expresia operatorului lui Laplace în coordonate curbilinii, să demonstrăm o lemă.

Lema 1. *Dacă un operator oarecare de ordinul al doilea este autoadjunct, el poate fi pus în mod obligatoriu sub forma*

$$Lu = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu, \qquad \text{(XXVIII.4)}$$

în care $A_{ij} = A_{ji}$.

Să observăm că un operator de forma (XXVIII.4) este autoadjunct. Aceasta rezultă imediat din definiția autoadjuncției operatorului [v. § 2, (V)].

Să demonstrăm acum afirmația reciprocă exprimată în lemă.

Să ne convingem de la început că operatorul adjunct celui dat este unic. Într-adevăr, fie M_1 și M_2 doi operatori adjuncți operatorului L, și fie v o funcție nulă peste tot în afara domeniului Ω_1, interior față de Ω; atunci,

$$\iiint_{\Omega} (uLv - vM_1u)\, d\Omega = 0$$

și

$$\iiint_{\Omega} (uLv - vM_2u)\, d\Omega = 0$$

pentru orice funcție u. Scăzînd, obținem

$$\iiint_{\Omega} v\,(M_1 - M_2)\, ud\Omega = 0.$$

Însă funcția v este arbitrară în domeniul Ω_v. De aceea, $(M_1 - M_2)u = 0$, și prin urmare operatorii M_1 și M_2 sînt identici.

Dacă L are forma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial t_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial t_i} + cu,$$

atunci operatorul său adjunct va fi

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(A_{ji} \frac{\partial u}{\partial t_j} \right) - \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial t_i} + cu,$$

iar ei pot fi egali numai dacă $B_i = 0$ și $A_{ij} = A_{ji}$. Lema noastră este demonstrată.

Laplacianul în variabilele t_1, t_2 și t_3 nu va fi autoadjunct. El poate fi însă ușor exprimat cu ajutorul unui astfel de operator. Într-adevăr, pentru orice pereche de funcții u și v alese la fel ca și pentru demonstrația lemei, avem

$$\iiint_{\Omega} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz = 0,$$

sau trecînd la noile variabile

$$\iiint_{\Omega} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,h_1 h_2 h_3\,dt_1\,dt_2\,dt_3 = 0,$$

deoarece conform celor demonstrate mai sus, iacobianul $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t_1, t_2, t_3)}$ poate diferi numai prin semn de mărimea $h_1 h_2 h_3$.

Înseamnă, că operatorul

$$Lu = h_1 h_2 h_3\,\Delta u$$

va fi autoadjunct.

Dacă

$$Lu = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial t_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)$$

(este evident că funcția însăși nu poate intra nici în Δ, nici în L), atunci

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\sum_{j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right) \qquad \text{(XXVIII.5)}$$

Coeficienții B_{ij} ai derivatelor de ordinul al doilea din expresia (XXVIII.5) vor fi egali cu $\frac{A_{ij}}{h_1 h_2 h_3}$, cum ușor se poate vedea.

Pe de altă parte, putem determina coeficienții B_{ij} și direct. Să înlocuim la început variabilele cu x_1, y_1, z_1; în acest caz, Δu nu se schimbă, deoarece operatorul lui Laplace este invariant în raport cu o transformare liniară ortogonală de variabile. Folosind acum formulele (XXVIII.3), obținem

$$B_{ij} = \frac{\partial t_i}{\partial x_1}\frac{\partial t_j}{\partial x_1} + \frac{\partial t_i}{\partial y_1}\frac{\partial t_i}{\partial y_1} + \frac{\partial t_i}{\partial z_1}\frac{\partial t_j}{\partial z_1} = \begin{cases} \frac{1}{h_i^2}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

De aici avem,

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

adică

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) + \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)\right]. \qquad \text{(XXVIII.6)}$$

În coordonate sferice, în care $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$, obținem

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{d\varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}. \qquad \text{(XXVIII.7)}$$

În coordonate cilindrice, vom avea

$$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = 1;$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad \text{(XXVIII.8)}$$

§ 2. Funcțiile lui Bessel

Să considerăm ecuația diferențială ordinară

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0. \qquad \text{(XXVIII.9)}$$

Această ecuație poartă denumirea *de ecuația lui Bessel.* În cursurile de teoria analitică a ecuațiilor diferențiale și în

cursurile de teoria funcțiilor speciale se stabilește o serie de proprietăți importante ale soluțiilor acestei ecuații pe care le prezentăm fără demonstrație. Cititorii pot face cunoștință cu demonstrațiile acestor proprietăți, de exemplu, din cartea lui Whittaker și Watson, „Curs de analiză modernă", partea II sau din Courant și Hilbert, „Metodele fizicii matematice", vol. I.

Vom considera ecuația (XXVIII.9), separat pentru valori întregi și pentru valori neîntregi ale lui ν.

Sînt valabile următoarele afirmații:

1. Pentru valorile neîntregi ale lui ν, ecuația (XXVIII.9) are două integrale liniare independente:

$$J_\nu(x) \text{ și } J_{-\nu}(x),$$

care pot fi dezvoltate în serii uniform convergente în întreg planul variabilei complexe x

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(\nu+s+1)},$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(-\nu+s+1)}.$$

Cu alte cuvinte $x^{-\nu} J_\nu(x)$ și $x^\nu J_{-\nu}(x)$ sînt funcții întreg de x. Funcțiile $J_\nu(x)$ și $J_{-\nu}(x)$ se numesc respectiv *funcțiile lui Bessel de ordinul* ν și $-\nu$; combinația lor liniară

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

poartă denumirea de *funcțiile lui Neumann*.

2. Pentru valori întregi $\nu = m$, funcțiile Bessel de ordinul m și de ordinul $-m$ determinate mai sus, nu vor mai fi independente

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x).$$

În acest caz, putem considera drept soluții liniar independente ale ecuației (XXVIII.7), două funcții

$$J_m(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(m+s+1)}, \qquad \text{(XXVIII.10)}$$

$$N_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(m-s-1)!}{\Gamma(s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2s} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \ldots + 1\right) -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(m+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+m} \times\right.$$

$$\left. \times\left(\frac{1}{m+s} + \frac{1}{m+s-1} + \ldots + 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \ldots + 1\right)\right],$$

în care $C = 0{,}577215\ldots$ este constanta lui Euler.

După cum rezultă din formulele (XXVIII.10), funcția lui Bessel $J_m(x)$ este o funcție întreagă de argumentul său împreună cu $x^{-m} J_m(x)$.

Funcția $N_m(x)$ denumită *funcția lui Neumann*, fiind limita funcții $N_\nu(x)$ pentru $\nu \to m$, are în originea coordonatelor o singularitate care este în același timp și punct de ramificație și pol.

3. Pentru valori pur imaginare ale argumentului ($x = it$), funcția

$$i^{-m} J_m(x) = i^{-m} J_m(it) = I_m(t),$$

soluția ecuației lui Bessel în raport cu variabila x, va fi reală.

O altă soluție a ecuației (XXVIII.9), reală pentru valorile imaginare ale lui x, ia forma

$$i^{-m}\left[N_m(x) - \frac{i\pi}{2} J_m(x)\right] = i^{-m}\left[N_m(it) - \frac{i\pi}{2} J_m(it)\right].$$

4. Combinațiile liniare

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x),$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

poartă numele de *funcțiile lui Hanckel* de speța I și de speța a II-a. Aceste funcții fiind evident soluțiile ecuației lui Bessel

(deși complexe pentru valori reale ale lui x), au următoarele expresii asimptotice pentru valori reale mari ale lui x, valabile atît pentru ν întreg cît pentru ν fracționar

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right], \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XXVIII.11)}$$

(Egalitatea $f(x) = O[\varphi(x)]$ înseamnă că raportul $\frac{f(x)}{|\varphi(x)|}$ rămîne mărginit pentru $x \to \infty$).

Pentru $H_\nu^{(1)}(x)$ această reprezentare este valabilă pentru valori mari ale lui x, satisfăcînd condiția

$$\left|\arg x - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{3\pi}{2},$$

iar pentru $H_\nu^{(2)}(x)$ această reprezentare este valabilă pentru valori mari ale lui x, satisfăcînd condiția

$$\left|\arg x + \frac{\pi}{2}\right| < \frac{3\pi}{2}.$$

Din formulele (XXVIII.11) se obțin următoarele expresii asimptotice pentru funcțiile lui Bessel și Neumann

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \\ N_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}\right\} \quad \text{(XXVIII.12)}$$

Formulele (XXVIII.12) arată cum se comportă funcțiile lui Bessel și Neumann atunci cînd argumentul crește. Acestea sînt funcții oscilante care trec de o infinitate de ori prin zero. Amplitudinea oscilațiilor lor se amortizează treptat. Rădăcinile funcțiilor lui Bessel și Neumann de același indice alternează. Funcția $I_n(z)$ admite, pentru valori reale mari ale lui z, reprezentarea

$$I_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}.$$

Putem obține pe cale elementară ecuația căreia îi satisface funcția $I_n(z)$

$$\frac{d^2 I_n(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI_n(z)}{dz} - \left(1+\frac{n^2}{z^2}\right) I_n(z) = 0.$$

Această funcție se întîlnește adesea în aplicații.

De obicei, se dau în tabele numai valorile funcțiilor $J_0(z)$ și $J_1(z)$. Între funcțiile $J_n(z)$ de indici n diferiți, există relații care ne permit să exprimăm pentru n întreg, orice funcție $J_n(z)$ și derivata sa cu ajutorul acestor două funcții de bază

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z),$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z).$$

§ 3. Separarea completă a variabilelor în ecuația $\Delta u = 0$ în coordonate polare

Să considerăm ecuația undelor în plan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Să presupunem că studiem oscilațiile unei membrane circulare $r \leqslant 1$ cu condiția la limite

$$u|_{r=1} = 0 \quad \text{(XXVIII.13)}$$

și cu condițiile inițiale

$$u|_{t=0} = u_0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1.$$

Trecînd la variabilele r și φ prin intermediul formulelor $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, reducem această expresie la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{(XXVIII.14)}$$

[v. (XXVIII.8)].

Vom căuta soluția ecuației (XXVIII.14) sub forma

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(r, \varphi)(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t),$$

în care v_i este soluția ecuației

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_i}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_i}{\partial \varphi^2}+\lambda_i^2 v_i=0. \qquad \text{(XXVIII.15)}$$

Vom arăta că r și φ sînt coordonatele normale ale problemei noastre.

Căutăm din nou soluția v_i sub forma produsului

$$v_i=\Phi_i(\varphi)\,R_i(r). \qquad \text{(XXVIII.16)}$$

Așa cum vom stabili mai tîrziu, asemenea soluții există. Introducînd expresia (XXVIII.16) în ecuația (XXVIII.15), obținem

$$\frac{\Phi_i}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_i}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}R_i\frac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}+\lambda_i^2 R_i\Phi_i=0$$

sau împărțind cu $R_i\Phi_i$ și înmulțind cu r^2

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR_i}{dr}\right)}{R_i}+\frac{\dfrac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}}{\Phi_i}+\lambda_i^2 r^2=0,$$

adică

$$-\frac{\dfrac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}}{\Phi_i}=\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR_i}{dr}\right)}{R_i}+r_i^2\lambda_i^2.$$

Egalînd ambii membri cu constanta m_i^2, obținem două ecuații

$$\Phi_i''+m_i^2\Phi_i=0, \qquad \text{(XXVIII.17)}$$

$$r(r\,R_i')'-(m_i^2-r^2\lambda_i^2)\,R_i=0. \qquad \text{(XXVIII.18)}$$

Pentru ca soluția ecuației (XXVIII.17) să aibă un sens fix bine determinat, trebuie ca ea să fie periodică, cu perioada 2π. Este evident că aici m_i trebuie să fie real și întreg. Atunci,

$$\Phi_i^{(1)}=\cos m_i\varphi,\quad \Phi_i^{(2)}=\sin m_i\varphi.$$

Ecuația (XXVIII.18) se reduce la forma autoadjunctă

$$(rR_i')'-\left(\frac{m_i^2}{r}-\lambda_i^2 r\right)R_i=0. \qquad \text{(XXVIII.19)}$$

Sub această formă, ecuația în R_i este autoadjunctă de ordinul al doilea. Vom căuta acea soluție a sa care se anulează

pentru $r=1$ și rămîne mărginită pentru $r=0$. Conform teoriei generale (v. lecția XX, exemplu, și lecția XXV, § 4), o asemenea soluție există pentru o anumită mulțime de valori.

Lema 1. *Funcțiile proprii ale ecuației* (XXVIII.19), *care satisfac condițiile la limită indicate, sînt ortogonale cu ponderea* r [1])

$$\int_0^1 R_i(r)\,R_j(r)\,r\,dr=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

Într-adevăr, să presupunem

$$LR_i\equiv(rR_i')'-\frac{m_i^2}{r}R_i=-\lambda_i^2 rR_i;$$

atunci,

$$\int_0^1[R_j\,LR_i-R_i\,LR_j]\,dr=(\lambda_j^2-\lambda_i^2)\int_0^1 rR_j\,R_i\,dr.$$

Însă, integrala din membrul stîng al identității este nulă, deci și integrala din membrul drept este nulă, ceea ce trebuia demonstrat.

Să facem substituția

$$\lambda_i r=\rho,$$

atunci,

$$\frac{d}{dr}=\lambda_i\frac{d}{d\rho},$$

iar ecuația (XXVIII.19) devine

$$\lambda_i\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_i}{d\rho}\right)-\left(\frac{m_i^2\lambda_i}{\rho}-\lambda_i\rho\right)R_i=0,$$

sau

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR_i}{d\rho}\right)-\left(\frac{m_i^2}{\rho}-\rho\right)R_i=0, \qquad \text{(XXVIII.20)}$$

[1]) Lema rezultă din teoria generală, totuși dăm demonstrația ei pentru a doua oară. Lema are loc pentru condiția mult mai generală în $r=1$, și anume $(\alpha R_i+\beta R_i')\big|_{r=1}=0$.

Notînd R_i cu y, avem

$$y'' + \frac{1}{\rho} y' + \left(1 - \frac{m_i^2}{\rho}\right) y = 0.$$

Vedem că problema s-a redus la integrarea ecuației lui Bessel despre care fusese vorba mai sus.

Este natural că trebuie să luăm pentru R soluția regulată a ecuației (XXVIII.20), adică

$$R_i(r) = J_{mi}(\lambda_i r).$$

Obținem valorile λ_i din condiția la limite (XXVIII.13). Avem

$$R_i(1) = J_{mi}(\lambda_i) = 0 \qquad \text{(XXVIII.21)}$$

După cum era de așteptat, această ecuație are o infinitate de soluții, ceea ce rezultă evident din reprezentarea asimtotică a funcției lui Bessel (XXVIII, 12).

Obținem astfel sistemul de soluții pentru problema noastră la limite, sub forma

$$c_i \cos(m_i\varphi)\, J_{mi}(\lambda_i r) \quad d_i \sin(m_i\varphi)\, J_{mi}(\lambda_i r) \qquad \text{(XXVIII.22)}$$

avînd valorile proprii λ_i^2, în care c_i și d_i sînt niște constante determinate din condiția de normare. Toate aceste soluții sînt ortogonale între ele. Este ușor de demonstrat, ca și în cazul vibrațiilor paralelipipedului dreptunghi, că funcțiile (XXVIII.22) pentru care perechile de numere m_i și λ_i sînt toate perechile posibile ce satisfac ecuația (XXVIII.21), ne dau toate funcțiile proprii ale problemei. Pentru demonstrație vom stabili lema.

Lema 2. *Orice funcție arbitrară* $\omega(r, \varphi)$, *care are derivate continue pînă la ordinul al doilea inclusiv care satisface condiția la limite* (XXVIII.13), *poate fi reprezentată printr-o serie convergentă de forma*

$$\omega(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{mk} \cos m\varphi + \beta_{mk} \sin m\varphi)\, J_m(\lambda_k^{(m)} r), \qquad \text{(XXVIII.23)}$$

în care

$$\alpha_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \omega(r, \varphi) \cos m\varphi\, J_m(\lambda_k^{(m)} r)\, r\, dr\, d\varphi,$$

$$\beta_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \omega(r, \varphi) \sin m\varphi\, J_m(\lambda_k^{(m)} r)\, r\, dr\, d\varphi.$$

Înainte de toate $\omega(r,\varphi)$, ca funcție periodică, poate fi pusă sub forma

$$\omega(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m(r) \cos m\varphi + b_m(r) \sin m\varphi], \qquad \text{(XXVIII.24)}$$

în care

$$a_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega(r, \varphi) \cos m\varphi\, d\varphi,$$

$$b_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega(r, \varphi) \sin m\varphi\, d\varphi.$$

Coeficienții $a_m(r)$ au derivate de ordinul al doilea continue, satisfac condiția la limite (XXVIII.13) și trebuie să rămînă mărginiți pentru $r = 0$; de aceea ei pot fi dezvoltați în serii uniform convergente de funcții proprii ale ecuației autoadjuncte (XXVIII.20), cu alte cuvinte de funcțiile $J_m(\lambda_k^{(m)} r)$ (v. exemplul din lecțiile XX și XXV)

$$a_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{mk} J_m(\lambda_k^{(m)} r), \qquad \text{(XXVIII.25)}$$

în care

$$\alpha_{mk} = \frac{\int_0^1 a_m(r)\, J_m(\lambda_k^{(m)} r)\, r\, dr}{\left\{\int_0^1 [J_m(\lambda_k^{(m)} r)]^2\, r\, dr\right\}^{\frac{1}{2}}}. \qquad \text{(XXVIII.26)}$$

Analog,

$$b_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{mk} J_m(\lambda_k^{(m)} r), \qquad \text{(XXVIII.27)}$$

în care

$$\beta_{mk} = \frac{\int_0^1 b_m(r)\, J_m(\lambda_k^{(m)} r)\, r\, dr}{\left\{\int_0^1 [J_m(\lambda_k^{(m)} r)]^2\, r\, dr\right\}^{\frac{1}{2}}}. \qquad \text{(XXVIII.28)}$$

Comparînd (XXVIII.25), (XXVIII.26), (XXVIII.27) și XXVIII.28), obținem rezultatul urmărit, seria (XXVIII.24) fiind uniform convergentă în raport cu φ, iar seriile (XXVIII.25) și (XXVIII.27) fiind uniform convergente în raport cu r.

Din lema 2 rezultă imediat că ecuația nu poate avea alte funcții proprii înafara celor găsite, deoarece fiecare din aceste funcții proprii s-ar putea reprezenta cu ajutorul unei serii (XXVIII 23) cu coeficienți nuli și în consecință ar trebui să fie nulă.

Problema vibrațiilor membrane este astfel rezolvată complet.

LECȚIA XXIX

POLINOAME ARMONICE ȘI FUNCȚII SFERICE

§ 1. Definiția funcțiilor sferice

Înainte de a trece la alte aplicații ale metodei lui Fourier, ne vom mai ocupa de o chestiune importantă. Să considerăm ecuația lui Laplace cu trei variabile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

și să ne punem problema de a găsi soluțiile acestei ecuații care au forma unor polinoame omogene de grad n în raport cu x, y și z.

În cazul planului, asemenea soluții omogene pentru ecuația lui Laplace au forma

$$(x + iy)^n,\ (x - iy)^n,$$

cum ușor se poate verifica.

Vom căuta soluția problemei sub forma

$$v = (x + iy)^m \sum_{j=0}^{\frac{n-m}{2}} a_j \rho^{2j} z^{n-m-2j} = (x + iy)^m f(\rho^2, z)^{1)}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(XXIX.1)}$$

în care

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

---

[1]) Însumarea se face de la $j = 0$ pînă la $j = E\left(\frac{n-m}{2}\right)$, în care $E\left(\frac{n-m}{2}\right)$ este partea întreagă a numărului $\frac{n-m}{2}$.

Calculînd laplacianul pentru v, obţinem

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m(m-1)(x+iy)^{m-2} f(\rho^2, z) + 4m(x+iy)^{m-1} x \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} +$$

$$+ 2(x+iy)^m \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial \rho^2} + 4x^2 (x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial (\rho^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -m(m-1)(x+iy)^{m-2} f(\rho^2, z) + 4miy(x+iy)^{m-1} \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} +$$

$$+ 2(x+iy)^m \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + 4y^2 (x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial z^2},$$

de unde

$$\Delta v = (x+iy)^m \left[\frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial z^2} + 4(m+1) \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + 4\rho^2 \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)^2} \right] =$$

$$= (x+iy)^m \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{(\rho^2)^m} \frac{\partial}{\partial(\rho^2)} \left[\rho^{2(m+1)} \frac{\partial f}{\partial(\rho^2)} \right] \right\}.$$

Introducînd expresia lui $f(\rho^2, z)$, obţinem

$$\Delta v = (x+iy)^m \left[\sum_{j=0}^{(n-m):2} (n-m-2j)(n-m-2j-1) a_j \rho^{2j} z^{n-m-2j-2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{(n-m):2} j(j+m) a_j \rho^{2j-2} z^{n-m-2j} \right].$$

Înlocuind în cea de-a doua sumă j cu $j+1$, deducem

$$\Delta v = (x+iy)^m \left\{ \sum_{j=0}^{(n-m):2} \left[(n-m-2j)(n-m-2j-1) a_j + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (j+1)(j+m+1) a_{j+1} \right] \rho^{2j} z^{n-m-2j-2} \right\}.$$

Anulînd coeficienţii lui $\rho^{2j} z^{n-m-2j-2}$ obţinem un sistem de ecuaţii din care toţi a_j se deduc succesiv cu ajutorul unuia oarecare din ei. Astfel,

$$a_1 = (-1) \frac{(n-m)(n-m-1)}{(m+1)} a_0,$$

$$a_2 = (-1)^2 \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{(m+1)(m+2)} a_0,$$

. . . . . ,

$$a_{j+1} = (-1)^{j+1} \frac{(n-m)(n-m-1)\ldots(n-m-2j-1)}{(j+1)!(m+1)(m+2)\ldots(m+j+1)} a_0.$$

Dacă a_0 este real şi pozitiv, atunci toţi coeficienţii a_{2j} vor fi pozitivi, iar a_{2j+1} vor fi toţi negativi. Să considerăm pentru fixarea ideilor

$$a_0 = \frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}.$$

Am stabilit, astfel, cu aproximaţia unui factor constant, existenţa unui singur polinom armonic de forma

$$v = (x+iy)^m f_{n,m}(\rho^2, z)$$

pentru un n oarecare dat şi $m = 0, 1, \ldots, n$.

$$(x-iy)^m f_{n,m}(\rho^2, z) \quad (m = 1, \ldots, n), \qquad \text{(XXIX.2)}$$

Asociindu-le încă n polinoame de forma (XXIX.2) obţinem sistemul de $2n+1$ polinoame armonice.

Nu este greu să ne convingem de faptul că aceste polinoame sînt liniar-independente. Considerînd drept noi variabile independente $\zeta_1 = x + iy$ şi $\zeta_2 = x - iy$, obţinem în fiecare din aceste polinoame un termen de gradul cel mai înalt în raport cu ζ_1, sau ζ_2 care nu poate fi întîlnit în nici una din combinaţiile liniare ale polinoamelor de indice m mai mic.

Să arătăm că nu există alte polinoame armonice omogene de grad n independente de cele date.

Orice polinom omogen $R_n(x, y, z)$ va fi un polinom în raport cu z, ζ_1 şi ζ_2 dacă introducem în el noi variabile independente z, $\zeta_1 = x + iy$, $\zeta_2 = x - iy$ şi deci poate fi reprezentat în mod unic sub forma

$$R_n = \varphi_{n,0}(\zeta_1 \zeta_2, z) + \sum_{m=1}^{n} [\zeta_1^m \varphi_{n,m}(\zeta_1 \zeta_2, z) + \zeta_2^m \varphi_{n,m}(\zeta_1 \zeta_2, z)].$$

(XXIX.3)

Pentru aceasta, este necesar să grupăm în expresia completă a acestui polinom toţi termenii de forma $\zeta_1^j \zeta_2^k z^i$ pentru care $j - k = \pm m$.

De aici, rezultă *că orice polinom omogen de gradul n poate fi reprezentat în mod unic sub forma unei sume polinoame conform formulei* (XXIX.3).

Aplicînd polinomului R_n laplacianul, obţinem un polinom omogen de gradul $n - 2$, care poate fi reprezentat şi el în mod unic sub forma unei sume de polinoame conform formulei (XXIX.3) prin înlocuirea lui n cu $n - 2$. Prin urmare, dacă R_n este un polinom armonic, atunci toţi termenii dezvoltării lui ΔR_n trebuie să se anuleze (din condiţia de unicitate rezultă că nu există altă dezvoltare decît cea pentru care toţi termenii sînt nuli). Pe de altă parte, aplicînd laplacianul formulei (XXIX.3) şi observînd că aplicarea laplacianului polinoamelor de forma (XXIX.1) şi (XXIX.2) nu dă polinoame de aceeaşi formă, însă, cu un n mai mic cu două unităţi, vedem că laplacianul fiecărui termen din suma (XXIX.3) este egal cu zero şi deci $\varphi_{n,m} = cf_{n,m}$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Continuînd să soluţionăm în analogie cu cazul plan, înlocuim coordonatele x, y, z prin coordonate sferice şi punem

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = r \cos\theta,$$

în care

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Atunci, orice polinom armonic de tipul considerat ia forma

$$r^n e^{\pm im\varphi} f_{n,m}(\sin^2\theta, \cos\theta) \sin^m\theta. \qquad \text{(XXIX.4)}$$

Să presupunem că

$$f_{n,m}(\sin^2\theta, \cos\theta) = \psi_{n,m}(\cos 0);$$

nu este greu de văzut că $\psi_{n,m}(\cos\theta)$ este un polinom în $\cos\theta$ de gradul $(n-m)$.

Într-adevăr, fiecare termen de forma

$$a_j z^{n-m-2j} \rho^{2j}$$

se înlocuieşte printr-un polinom de forma

$$a_j (\cos\theta)^{n-m-2j} \sin^{2j}\theta = a_j (1-\cos^2\theta)^j (\cos\theta)^{n-m-2},$$

în care semnul termenilor care conţin pe

$$(\cos\theta)^{n-m-2j},$$

este $(-1)^k$. Într-o sumă de asemenea polinoame nici unul din termeni nu se poate reduce. Este evident

$$\psi_{n,m}(1) = a_0 = \frac{(n+m)!}{m!\, 2^m (n-m)!}.$$

Punînd

$$\sin^m\theta\, \psi_{n,m}(\cos\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta), \qquad \text{(XXIX.5)}$$

putem, folosind expresia (XXIX.4), să scriem sistemul complet de polinoame armonice omogene de x, y, z de gradul n sub forma

$$\left.\begin{aligned} & r^n P_n^{(0)}(\cos\theta), r^n \sin\varphi P_n^{(1)}(\cos\theta), r^n \sin 2\varphi P_n^{(2)}(\cos\theta), \ldots \\ & \qquad \ldots, r^n \sin n\varphi P_n^{(n)}(\cos\theta); \\ & r^n \cos\varphi P_n^{(1)}(\cos\theta), r^n \cos 2\varphi P_n^{(2)}(\cos\theta), \ldots \\ & \qquad \ldots, r^n \cos n\varphi P_n^{(n)}(\cos\theta). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIX.6)}$$

Funcţiile (XXIX.6) sînt analogele spaţiale ale funcţiilor

$$\rho^n \cos n\varphi, \rho^n \sin n\varphi,$$

care sînt polinoamele armonice în plan, iar funcţiile

$$\left.\begin{aligned} & \sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta), \\ & \cos m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIX.7)}$$

sînt analogele funcţiilor trigonometrice de multiplul argumentului, $\cos n\varphi$ şi $\sin n\varphi$. Aceste funcţii sau combinaţiile lor liniare se numesc în mod obişnuit *armonice sferice de ordinul n.*

§ 2. Aproximarea cu ajutorul funcţiilor sferice

Teorema 1. *Putem reprezenta orice funcţie continuă pe sfera de rază egală cu* 1 *printr-o combinaţie liniară de funcţii* (XXVII.7) *avînd ordinile* 0, 1 ... ,*N cu orice aproximaţie, în sensul convergenţei uniforme, dacă N este suficient de mare.*

Pentru a demonstra această teoremă să stabilim la început cîteva propoziţii ajutătoare.

Lema 1. ***Orice funcţie*** $F(\theta, \varphi)$ ***continuă pe suprafaţa sferei de rază egală cu*** 1 ***poate fi reprezentată cu aproximaţie oricît de bună prin polinomul***

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} a_{klm} x^k y^l z^m.$$

Demonstraţie. Să alcătuim expresia

$$Q_N = \frac{N+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta_1, \varphi_1) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1$$

în care $\cos\gamma$ este cosinusul unghiului dintre vectorul

$$x = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = \sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = \cos\theta,$$

şi vectorul

$$x_1 = \sin\theta_1\cos\varphi_1$$
$$y_1 = \sin\theta_1\sin\varphi_1,$$
$$z_1 = \cos\theta_1$$

avem

$$\cos\gamma = xx_1 + yy_1 + zz_1.$$

Este uşor de stabilit că Q_N este un polinom de gradul N în raport cu x, y, z. Să demonstrăm, pe de altă parte, că

$$Q_N - F = \varepsilon(N)$$

tinde uniform către zero pentru N tinzînd către infinit.

Să considerăm integrala

$$\frac{N+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta, \varphi) \sin\theta_1 \, d\theta_1, \, d\varphi_1 =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi} F(\theta, \varphi) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1.$$

Fie S suprafaţa sferei de raze egale cu 1. Mărimea

$$\frac{N+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS$$

nu depinde de punctul (θ, φ). Prin urmare, calculînd-o, putem pune $\theta = 0$. Aici, $\cos\gamma = \cos\theta_1$, iar integrala se scrie, astfel

$$\frac{N+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^N \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 =$$

$$= -\frac{N+1}{4\pi} 4\pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^N d\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^{N+1} \Bigg|_0^{\pi} = 1.$$

Deci,

$$\frac{N+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta, \varphi) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 = F(\theta, \varphi).$$

Mai departe,

$$Q_N - F(\theta, \varphi) =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N [F(\theta_1, \varphi_1) - F(\theta, \varphi)] \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1.$$

Să desfacem ultima integrală în doi termeni punînd în evidenţă în jurul punctului (θ, φ) un domeniu $\gamma < \delta$ de pe sferă, astfel încît să avem

$$|F(\theta, \varphi) - F(\theta_1, \varphi_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru punctele (θ_1, φ_1) aparţinînd domeniului $\gamma < \delta$.

Funcția $F(\theta,\varphi)$ este mărginită în baza continuității sale și deci

$$|F(\theta, \varphi)| \leqslant M.$$

Să alegem acum pe N atît de mare, încît să fie satisfăcută inegalitatea

$$(N+1)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^N < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Atunci, avem evident

$$(N+1)\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N < \frac{\varepsilon}{4M} \text{ pentru } \gamma \geqslant \delta.$$

Pentru un astfel de N, avem

$$|Q_N - F| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma\geqslant\delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N |F(\theta,\varphi) - F(\theta_1,\varphi_1)| \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1 +$$

$$+ \frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma<\delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N |F(\theta,\varphi) - F(\theta_1,\varphi_1)| \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N+1}{4\pi}\, 2M \iint\limits_{\gamma\geqslant\delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma<\delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lema noastră este demonstrată.

Lema 2. *Fie $Q_k(x,y,z)$ un polinom cu totul arbitrar de variabilele x, y, z de gradul k. Există atunci un polinom armonic $P_k(x,y,z)$ de grad cel mult egal cu k, care ia pe sferă $x^2+y^2+z^2=1$ aceleași valori ca și $Q_k(x,y,z)$.*

Demonstrație. Conform celor demonstrate mai sus, polinomul $Q_k(x,y,z)$ poate fi reprezentat sub forma

$$Q_k = q_0(\rho^2, z) + \sum_{m=1}^{K} [(x+iy)^m\, q_{1,m}(\rho^2, z) + (x-iy)^m\, q_{2,m}(\rho_2, z)]$$

[v. (XXIX.3)].

Aceasta înseamnă că pe suprafața $x^2+y^2+z^2=1$, vom avea

$$Q_k = \tau_0(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{k} \sin^m\theta\, [\cos m\varphi\, \tau_{1,m}(\cos\theta) + \sin m\varphi\, \tau_{2,m}(\cos\theta)] \tag{XXIX.8}$$

în care $\tau_0(\cos\theta)$ este un polinom în $\cos\theta$ de grad cel mult egal cu k, iar polinoamele $\tau_{1,m}$ și $\tau_{2,m}$ sînt polinoame în $\cos\theta$ de grad cel mult egal cu $k-m$.

Mărimea $\tau_0(\cos\theta)$, însă, poate fi reprezentată, evident, sub forma

$$\tau_0(\cos\theta) = \sum_{j=0}^{k} c_j\, P_j^{(0)} \cos(\theta), \tag{XXIX.9}$$

iar fiecare din mărimile $\sin^m\theta\tau_{1,m}$ și $\sin^m\theta\tau_{2,m}$ poate fi reprezentată sub forma

$$\left.\begin{aligned} \sin^m\theta\tau_{1,m}(\cos\theta) &= \sum_{n=m}^{k} c_{n,m}^{(1)}\, P_n^{(m)}(\cos\theta), \\ \sin^m\theta\tau_{2,m}(\cos\theta) &= \sum_{n=m}^{k} c_{n,m}^{(2)}\, P_n^{(m)}(\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{XXIX.10}$$

Coeficienții acestor dezvoltări pot fi găsiți rînd pe rînd pornind de la cel mai mare, deoarece gradul fiecărui $P_n^{(m)}(\xi)$ crește cu o unitate odată cu numărul n.

Demonstrăm lema noastră introducînd pe (XXIX.9) și (XXIX.10) în (XXIX.8). Din lemele 1 și 2 rezultă imediat teorema 1. Într-adevăr, orice funcție continuă poate fi înlocuită, cu orice aproximație pe sferă, cu un polinom, conform lemei 1. Conform lemei 2, acest polinom se înlocuiește imediat cu un polinom armonic.

§ 3. Problema lui Dirichlet pentru sferă

Teorema demonstrată ne dă o nouă metodă de rezolvare a problemei lui Dirichlet pentru sferă. Știm din lecțiile precedente că această problemă admite totdeauna o soluție continuă și că dacă înlocuim valoarea limită a funcției

$$u|_S = \varphi$$

cu una aproximativă φ', astfel, încît

$$|\varphi - \varphi'| < \varepsilon$$

soluţia ecuaţiei

$$\Delta u = 0$$

cu condiţia

$$u|_S = \varphi'$$

diferă cu mai puţin decît ε de soluţia aceleiaşi ecuaţii cu condiţia

$$u|_S = \varphi.$$

Luînd pentru φ' o combinaţie liniară de funcţii sferice, găsim imediat soluţia problemei sub forma unei sume de polinoame corespunzătoare. Aceasta va fi soluţia aproximativă a problemei lui Dirichlet. La sfîrşitul lecţiei vom da o expresie explicită a soluţiei exacte cu ajutorul funcţiilor sferice.

§ 4. Ecuaţiile diferenţiale ale funcţiilor sferice

Fie $Y_n(\theta,\varphi)$ o armonică sferică oarecare de ordinul n. Produsul

$$r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

este un polinom armonic. Prin urmare,

$$\Delta r^n Y_n(\theta, \varphi) = 0.$$

Folosind expresia laplacianului în coordonate sferice [v. (XXVIII.7)], obţinem

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}(r^n Y_n(\theta,\varphi))\right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(r^n Y_n(\theta,\varphi))\right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[r^n Y_n(\theta,\varphi)] = 0,$$

de unde

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta \frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0. \quad \text{(XXIX.11)}$$

Ecuaţia (XXIX.11) se obţine din ecuaţia

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0 \quad \text{(XXIX.12)}$$

pentru

$$\lambda = n(n+1). \quad \text{(XXIX.13)}$$

Să notăm cu D operatorul

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

care operează asupra funcţiei $\chi(\theta,\varphi)$, definită pe suprafaţa sferei de rază 1. Ecuaţia (XXIX.12) se scrie acum sub forma,

$$DY + \lambda Y = 0. \quad \text{(XXIX.14)}$$

La prima vedere, operatorul D depinde de modul în care a fost ales polul sferei. Totuşi, el rămîne, de fapt, invariant oricum am alege coordonatele θ şi φ pe această sferă. Într-adevăr, să presupunem că funcţia $\chi(\theta, \varphi)$ este definită oricum pe sferă. Vom considera că ea este definită în întreg spaţiul r, θ, φ şi nu depinde de r. Atunci,

$$D[\chi(\theta,\varphi)] = r^2 \Delta\chi.$$

Laplacianul, care se găseşte în membrul drept, nu depinde de alegerea axelor de coordonate, deci şi operatorul D nu va depinde de această alegere, ceea ce trebuia demonstrat.

Lungimea arcului ds al unei curbe oarecare de pe sferă se exprimă cu ajutorul relaţiei

$$ds = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

sau

$$ds^2 = h_1^2 d\theta^2 + h_1^2 d\varphi^2, \text{ unde } h_1 = 1, h_2 = \sin\theta.$$

Operatorul D se exprimă prin intermediul lui h_1 şi h_2 cu ajutorul formulei

$$D\chi = \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}$$

prin analogie cu formula (XXVIII.6) care exprimă laplacianul în coordonate curbilinii. De aceea, expresia $D\chi$ se numeşte *laplacianul* pe suprafaţa sferei.

Ecuaţia (XXIX.12) nu poate avea o soluţie nebanală şi continuă pe întreaga suprafaţă a sferei pentru orice valoare λ. Problema determinării unor asemenea valori λ şi a soluţiilor corespunzătoare acestora este analogă cu problema determinării soluţiilor ecuaţiei

$$y'' + \lambda y = 0,$$

continue pe cerc. Această din urmă problemă a fost studiată în lecţia XX. Problema propusă acum poate fi redusă la o problemă de teoria ecuaţiilor integrale cu ajutorul funcţiei lui Green. Să ne oprim mai amănunţit asupra acestei chestiuni. Vom căuta soluţia ecuaţiei

$$Dv = \psi(\theta, \varphi) \qquad \text{(XXIX.15)}$$

pe sferă. Să observăm că ecuaţia omogenă corespunzătoare

$$Du = 0 \qquad \text{(XXIX.16)}$$

are o soluţie nebanală $u \equiv 1$. De aceea, problema găsirii soluţiei lui (XXIX.15) nu este totdeauna rezolvabilă.

Vom numi funcţia lui Green pentru ecuaţia (XXIX.15) funcţia de două puncte variabile ale sferei

$$G = \frac{1}{2\pi} \lg \sin \frac{\gamma}{2},$$

în care am notat cu γ distanţa unghiulară dintre punctele considerate. Din trigonometria sferică se cunoaşte expresia lui $\cos\gamma$

$$\cos\gamma = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

în care θ_1, φ_1 sînt coordonatele unuia dintre puncte, iar θ_2, φ_2 sînt coordonatele celuilalt punct. Să arătăm că dacă funcţia ψ satisface condiţia

$$\iint_S \psi\, dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = 0, \qquad \text{(XXIX.17)}$$

soluţia ecuaţiei (XXIX.15) satisfăcînd aceleaşi condiţii

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = 0, \qquad \text{(XXIX.17')}$$

este determinată de formula

$$v(\theta_0, \varphi_0) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0)\, \psi(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \iint_S G\, \psi\, dS, \qquad \text{(XXIX.18)}$$

unde am notat cu dS elementul de suprafaţă al sferei. Prin aceasta, va fi justificată denumirea dată funcţiei G.

Să presupunem că există soluţia ecuaţiei (XXIX.15). Să alegem ca punct θ_0, φ_0 polul sferei. Vom avea

$$\iint_S G\, \psi\, dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} GDv \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} GDv\, d\varphi\right)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \lg \sin\frac{\theta}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\, d\varphi\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\, d\varphi\right\} d\theta =$$

$$= -\int_0^{\pi} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\, d\varphi\right]\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\, d\theta +$$

$$+ \left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\, d\varphi\right)\lg\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\, d\varphi\right]d\theta - \left(\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\, d\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}.$$

În baza condiţiei (XXIX.17), obţinem

$$\iint_S G\, \psi\, ds = v\,|_{\theta=0}. \qquad \text{(XXIX.19)}$$

Din consideraţii de simetrie rezultă, de aici, valabilitatea formulei (XXIX.18) pentru orice punct al sferei. Putem arăta de asemenea că dacă ψ este o funcţie arbitrară, care satisface condiţia (XXIX.17), atunci funcţia $v(\theta, \varphi_0)$, determinată de egalitatea (XXIX.18), ne dă soluţia ecuaţiei

$$Dv = \psi.$$

Demonstraţia acestei propoziţii este analogă aceleia pe care am făcut-o în repetate rînduri şi o lăsăm deoparte. Funcţia lui

Green, construită de noi, este o funcţie simetrică şi de aceea ecuaţiei

$$u = \lambda \int\int_S Gu\, dS,$$

echivalentă cu (XXIX.4), i se poate aplica întreaga teorie a ecuaţiilor integrale cu nucleu simetric.

Dacă ne punem problema de a găsi toate soluţiile regulate ale ecuaţiei (XXIX.12) de pe sferă, rezultă, din cele expuse, că valorile (XXIX.13) vor fi valori proprii.

Fiecare valoare proprie are $(2n + 1)$ funcţii proprii. Am obţinut mai sus în formula (XXIX.7) totalitatea soluţiilor ecuaţiei (XXIX.12). Din teoria generală a ecuaţiilor integrale rezultă că acele funcţii (XXIX.7), care corespund la valori diferite ale lui n, sînt ortogonale. Soluţiile (XXIX.7) cu aceeaşi valoare pentru n, sînt ortogonale în baza faptului că în intervalul $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ sînt ortogonale toate sinusurile şi toate cosinusurile multiplilor arcelor. De aici rezultă ortogonalitatea tuturor funcţiilor (XXIX.7)

Teorema 2. *Funcţiile* (XXIX.7) *constituie mulţimea tuturor funcţiilor proprii ale ecuaţiei* (XXIX.12).

Demonstraţie. Să presupunem că $Y^*(\theta, \varphi)$ este o funcţie proprie oarecare a ecuaţiei (XXIX.12) diferită de (XXIX.7) şi fie $u_i(\theta,\varphi)$ mulţimea de funcţii (XXIX.7) numerotată într-un anumit mod. Conform teoremei 1, funcţia $Y^*(\theta, \varphi)$ poate fi reprezentată sub forma

$$Y^*(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} u_i(\theta, \varphi) + \eta_N,$$

în care η_N este oricît de mic vrem noi.

Înseamnă,

$$\int\int_S \left[Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} u_i(\theta, \varphi) \right]^2 ds = \int\int_S \eta_N^2\, dS < \varepsilon(N).$$

Fie

$$y_i = \int\int_S Y^*(\theta, \varphi)\, u_i(\theta, \varphi)\, dS.$$

Atunci,

$$\int\int_S \left(Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} y_i u_i(\theta, \varphi) \right)^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant \int\int_S \left(Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} u_i(\theta, \varphi) \right)^2 dS.$$

Luînd în considerare ortogonalitatea lui $Y^*(\theta,\varphi)$, cu toate funcţiile $u_i(\theta,\varphi)$, care rezultă din teoria generală a ecuaţiilor integrale precum şi egalitatea

$$y_i = 0,$$

care rezultă din aceasta, obţinem

$$\int\int_S [Y^*(\theta, \varphi)]^2\, dS < \varepsilon$$

pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar. Înseamnă că $Y^*(\theta,\varphi) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Din teorema 2 rezultă imediat posibilitatea reprezentării oricărei funcţii $\varphi(S)$ de pătrat integrabil pe sferă, adică a oricărei funcţii care satisface condiţia

$$\int\int_S \varphi^2(S)\, dS < \infty,$$

sub forma unei serii convergente în medie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i u_i,$$

în care

$$\varphi_i = \int\int_S \varphi u_i\, dS.$$

Convergenţa seriei va fi uniformă în baza teoremei lui Hilbert-Schmidt, dacă φ admite derivate de ordinul al doilea continue.

Să introducem în ecuaţia (XXIV.12) funcţia (XXIX.7). Folosindu-ne de faptul că

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [\sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta)] = -m^2 \sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

vom avea

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial P_n^{(m)}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right]+$$

$$+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_n^{(m)}(\cos\theta)=0. \qquad \text{(XXIX.20)}$$

Ecuaţia (XXIX.20) este ecuaţia diferenţială a funcţiei $P_n^{(m)}(\cos\theta)$. Să notăm

$$\cos\theta=\mu.$$

Atunci,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=-\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\mu},$$

iar ecuaţia (XXIX.20) se transcrie, astfel

$$\frac{d}{d\mu}\left[\sin^2\theta\,\frac{dP_n^{(m)}(\mu)}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_n^{(m)}(\mu)=0$$

au

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\,\frac{dP_n^{(m)}(\mu)}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_n^{(m)}(\mu)=0. \qquad \text{(XXIX.21)}$$

Ecuaţia diferenţială obţinută este liniară de ordinul al doilea. Ea se obţine din ecuaţia

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\,\frac{dy}{d\mu}\right]+\left[\lambda_1-\frac{\lambda_2}{1-\mu^2}\right]y=0$$

pentru $\lambda_1=n(n+1)$ şi $\lambda_2=m^2$.

Dacă ne punem problema să determinăm pe λ_1 şi λ_2 astfel ca soluţia acestei din urmă ecuaţii să fie mărginită, atunci putem afirma că pentru $\lambda_2=m^2$ aceasta nu va admite nici un fel de alte valori proprii în afară de $\lambda_1=n(n+1)$. Aceasta rezultă din faptul că în cazul contrar am avea o funcţie proprie y^* a ecuaţiei (XXIX.21) căreia i-ar corespunde o funcţie proprie a ecuaţiei (XXIX.12) sub forma $P^*(\cos\theta)\sin m\varphi$, diferită de toate funcţiile (XXIX.7), ceea ce, conform celor demonstrate, nu este posibil.

Relaţiile obţinute de noi ne permite să punem problema determinării soluţiilor ecuaţiei lui Laplace pentru sferă cu ajutorul metodei separării variabilelor. Mai mult decît atît, noi am folosit, de fapt, această metodă pornind de la alte premize. Separînd variabilele în ecuaţia lui Laplace

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

vom avea după calcule simple, pe care le lăsăm în seama cititorului,

$$u=\sum_{\substack{n,\,m\\ m\leq n}} r^n P_n^{(m)}(\cos\theta)\,[a_n^{(m)}\cos m\varphi+b_n^{(m)}\sin m\varphi],$$

în care $\cos m\varphi$ şi $\sin m\varphi$ sînt soluţiile ecuaţiei

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0,$$

$\overline{P}_n^{(m)}$ este soluţia ecuaţiei (XXIX.20) sau (XXIX.21) iar r^n este soluţia ecuaţiei

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR}{dr}\right)-n(n+1)R=0.$$

LECȚIA XXX

CÎTEVA PROPRIETĂȚI SIMPLE ALE FUNCȚIILOR SFERICE

§ 1. Reprezentarea polinoamelor lui Legendre

Să studiem cîteva proprietăți ale funcțiilor sferice.

Teorema 1. *Ecuația diferențială*

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dy}{d\mu}\right]+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)y=0$$

este verificată de funcția

$$P_n^{(m)}(\mu)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m}(1-\mu^2)^n}{d\mu^{n+m}}. \qquad \text{(XXX.1)}$$

Demonstrație. Fie $(1-\mu^2)^n=\Phi$. Este ușor să verificăm direct formula

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\Phi}{d\mu^2}+2(n-1)\mu\frac{d\Phi}{d\mu}+2n\Phi=0.$$

Derivînd-o de $m+n$ ori în raport cu μ cu ajutorul cunoscutei reguli a lui Leibnitz, obținem

$$(1-\mu^2)\frac{d^{m+n+2}\Phi}{d\mu^{m+n+2}}-2(m+1)\mu\frac{d^{m+n+1}\Phi}{d\mu^{m+n+1}}+$$

$$+(n-m)(n+m+1)\frac{d^{n+m}\Phi}{d\mu^{n+m}}=0,$$

sau punînd

$$\frac{d^{m+n}\Phi}{d\mu^{m+n}}=\psi,$$

$$(1-\mu^2)\psi''-2(m+1)\mu\psi'+(n-m)(n+m+1)\psi=0.$$

Mai departe, fie

$$P_n^{(m)}(\mu)=C(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\psi,$$

de unde, prin înlocuirea directă, obținem

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P_n^{(m)}}{d\mu^2}-2\mu\frac{dP_n^{(m)}}{d\mu}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_n^{(m)}=$$

$$=C(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}[(1-\mu^2)\psi''-2(m+1)\mu\psi'+$$

$$+(n-m)(n+m+1)\psi]=0,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Formula (XXXI.1) ne dă, evident, o nouă expresie explicită pentru $P_n^{(m)}(\cos\theta)$, deoarece $r^n\sin m\varphi\ P_n^{(m)}$ este un polinom armonic, iar două polinoame de această formă nu pot exista.

Din această formulă putem obține o serie de formule de recurență comode pentru calculul funcțiilor $P_n^{(m)}(\cos\theta)$.

Polinoamele

$$P_n^{(0)}(\mu)=P_n(\mu)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n(1-\mu^2)^n}{d\mu^n}$$

poartă denumirea specială de *polinoamele lui Legendre*. Printre celelalte funcții sferice ele joacă un rol deosebit.

De fapt, nu avem deocamdată dreptul să notăm cu $P_n^{(m)}(\mu)$ funcția (XXX.1), care poate diferi de funcția $P_n^{(m)}(\mu)$ introdusă de noi anterior printr-un factor constant. Totuși, este ușor să stabilim că acest factor este unitatea. Din formula (XXX.1), rezultă

$$P_n(1)=1. \qquad \text{(XXX.2)}$$

Într-adevăr, să punem $\mu-1=z$; atunci,

$$(1-\mu^2)^n=(-1)^n z^n(2+z)^n=(-1)^n(2^n z^n+\dots),$$

de unde rezultă imediat (XXX.2).

Dacă

$$\frac{P_n^{(m)}(\cos\theta)}{\sin^m\theta}=\psi_{n,m},$$

atunci, în mod analog,

$$\psi_{n,m}(1) = \frac{(n+m)!}{2^m m!\,(n-m)!},$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră.

§ 2. Funcția generatoare

Teorema 2. *Dezvoltarea funcției*

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

după puterile lui r are forma

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta). \qquad \text{(XXX.3)}$$

De aceea, funcția $\frac{1}{r_1}$ *se numește funcția generatoare a polinoamelor lui Legendre.*

Această teoremă ar putea fi demonstrată direct calculînd coeficienții dezvoltării, însă poate fi stabilită și pe altă cale.

Considerînd funcția $\frac{1}{r_1}$ într-o anumită sferă $r \leqslant \rho < 1$, ea poate fi dezvoltată în serie după puterile lui r, coeficienții fiind, evident, polinoame de $\cos\theta$, adică

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Q_n(\cos\theta).$$

Într-adevăr,

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = (1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta}), \qquad \text{(XXX.4)}$$

de unde rezultă imediat că dezvoltarea noastră va avea raza de convergență egală cu unitatea. Înseamnă că pentru $r = \rho$

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Q_n(\cos\theta). \qquad \text{(XXX.5)}$$

Conform celor demonstrate în lecția precedentă, o funcție armonică, care ia pe suprafața $r = \rho$ valorile date (XXX.5), poate fi dezvoltată într-o serie uniform convergentă.

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta).$$

Din unicitatea dezvoltării funcției generatoare într-o serie de puteri după r, rezultă

$$Q_n(\cos\theta) = a_n P_n(\cos\theta).$$

Pentru a determina mărimea a_n, observăm că, pentru $\cos\theta = 1$, avem

$$(1 - 2r\cos\theta + r^2)_{\theta=0} = (1-r)^2$$

și

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Comparînd aceasta cu expresia $\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n P_n(1)$, avem:

$$a_n = 1.$$

Teorema 2 este demonstrată.

Consecința 1. *Au loc egalitățile*

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta), & r < R; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), & r > R. \end{cases} \qquad \text{(XXX.6)}$$

Într-adevăr,

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{R}{r}\cos\theta + \left(\frac{R}{r}\right)^2}},$$

de unde rezultă (XXX.6).

Consecința 2. *Este valabilă relația*

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r\cos\theta + r^2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{r^n}{\rho^{n+2}} P_n(\cos\theta);\ r < \rho \qquad \text{(XXX.7)}$$

Să mai observăm că seriile (XXX.6) și (XXX.7) vor avea o convergență uniformă în raport cu variabila θ, dacă avem respectiv $R - r > \varepsilon$, $r - R > \varepsilon$ sau $\rho - r > \varepsilon$ pentru un R dat.

Pentru a demonstra această afirmație, vom considera seria

$$\frac{1}{\sqrt{1-r}} = 1 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}r^2 + \dots \qquad \text{(XXX.8)}$$

Toți termenii acestei serii sînt egali în valoare absolută cu termenii corespunzători ai seriilor

$$\frac{1}{\sqrt{1-re^{i\theta}}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad \frac{1}{\sqrt{1-re^{-i\theta}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n r^n. \qquad \text{(XXX.9)}$$

Prin urmare, termenii seriei

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{\sqrt{1-r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r}} = 1 + r + r^2 + \dots,$$

care poate fi obținută prin înmulțirea termen cu termen a seriei (XXX.8) cu ea însăși, nu vor fi în valoare absolută mai mici decît termenii corespunzători ai seriei

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-re^{i\theta}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-re^{-i\theta}}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta),$$

obținută prin înmulțirea termen cu termen a seriilor (XXX.9), una cu alta.

Obținem, astfel, inegalitatea

$$P_n(\cos\theta) \leqslant 1,$$

în care semnul egalității poate avea loc numai pentru $\theta = 0$ adică pentru $\cos\theta = 1$, așa cum ușor se poate vedea din demonstrație. De aici rezultă afirmația noastră asupra convergenței uniforme.

§ 3. Formula lui Laplace

Fie, acum, $r^n Y(\theta, \varphi)$ un polinom armonic oarecare. Aplicînd formula lui Green, obținem

$$r^n Y_n(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\rho=1} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} \rho^n Y_n(\theta_1,\varphi_1) - \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial n}(\rho^n Y_n(\theta_1,\varphi_1)) \right\} dS_1, \qquad \text{(XXX.10)}$$

în care

$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\gamma + \rho^2},$$

iar dS_1 înseamnă elementul de suprafață al sferei în coordonatele ϑ_1, φ_1; $r < \rho$ este distanța dintre punctele $M(r, \theta, \varphi)$ și $M(\rho, \theta_1, \varphi_1)$, iar γ este unghiul dintre vectorul dus din origine în punctul M și vectorul dus din origine în punctul M_1.

Este, evident,

$$r\rho\cos\gamma =$$
$$= r\sin\theta\cos\varphi\rho\sin\theta_1\cos\varphi_1 + r\sin\theta\sin\varphi\rho\sin\theta_1\sin\varphi_1 +$$
$$+ r\cos\theta\rho\cos\theta_1 = r\rho[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)].$$

Introducînd în formula (XXX.8), în locul lui $\frac{1}{r_1}$ și

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \rho},$$

expresiile lor din (XXX.6) și (XXX.7), vom avea

$$r^n Y_n(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\rho=1} Y_n(\theta_1,\varphi_1) \left[\rho^n (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\rho^{k+2}} P_k(\cos\gamma) + \right.$$
$$\left. + n\rho^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\rho^{k+1}} P_k(\cos\gamma) \right] \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\theta_1,\varphi_1)(2n+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k(\cos\gamma) \right] \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1.$$

Este evident că funcția $P_j(\cos\gamma)$, pentru $j \neq n$, este ortogonală cu funcția $Y_n(\theta,\varphi)$ întrucît ele sînt funcții armonice de ordine diferite. Integrînd seria termen cu termen, ceea ce este posibil datorită convergenței sale în medie și, observînd că astfel dispar toți termenii în afară de unul singur, obținem

$$r^n Y_n(\theta,\varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^n Y_n(\theta_1,\varphi_1) \, P_n(\cos\gamma) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1,$$

adică

$$Y_n(\theta,\varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\theta_1,\varphi_1) \, P_n(\cos\gamma) \, d\theta_1, d\varphi_1. \qquad \text{(XXX.11)}$$

Formula (XXX.11) ne permite să obținem dintr-o dată coeficienții dezvoltării funcției date $F(\theta,\varphi)$ după armonicele sferice.

Fie

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi). \qquad \text{(XXX.12)}$$

Înmulțind ambii membri ai formulei (XXX.12) cu $P_k(\cos\gamma)$ și integrînd pe sferă, obținem

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta_1, \varphi_1)\, P_k(\cos\gamma) \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1 = Y_k(\theta, \varphi). \qquad \text{(XXX.13)}$$

Formula (XXX.13) poartă numele de *formula lui Laplace*.

Formula lui Laplace ne dă posibilitatea să scriem în mod explicit soluția problemei lui Dirichlet pentru sferă sub forma unei serii de polinoame armonice. Într-adevăr, înmulțind fiecare armonică de ordinul k cu r^k și adunînd, putem obține o funcție armonică care ia pe periferia sferei valorile date $F(\vartheta,\varphi)$. Obținem soluția sub forma următoare:

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) r^k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\vartheta_1, \varphi_1)\, P_k(\cos\gamma) \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1.$$

Încheind expunerea teoriei funcțiilor sferice, vom da fără demonstrație cîteva formule care pot fi adesea de folos.

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2\, d\mu = \frac{2}{2n+1}, \qquad \text{(XXX.14)}$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^{(m)}(\mu)]^2\, d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, P_{n'}(\mu)\, d\mu = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(\mu)\, P_{n'}^{(m)}(\mu)\, d\mu = 0,$$

$$n \neq n'.$$

Formulele (XXX.12) ne permit să calculăm nemijlocit coeficienții dezvoltării funcției în serie după funcțiile sferice de forma (XXIX.7).

Să semnalăm, în sfîrșit, reprezentarea asimptotică a polinoamelor lui Legendre pentru valori mari ale lui n

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\theta}} \left\{ \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \varepsilon_n \right\},$$

în care $\varepsilon_n \to 0$ pentru $n \to \infty$ uniform în raport cu θ pentru $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$.

Noi terminăm cu aceasta cursul inițial de ecuațiile fizicii-matematice, consacrat studiului proprietăților calitative fundamentale ale acestor ecuații și metodelor clasice pentru rezolvarea lor.

Cu aceste chestiuni, se înțelege, nu este nici pe departe epuizat ansamblul problemelor moderne ale fizicii-matematice. Astfel, au rămas în afara cadrului nostru încă următoarele chestiuni importante care pot alcătui conținutul cel puțin a încă unui asemenea volum:

1. Problemele fizicii-matematice pentru mediile nemărginite și aplicarea transformării integrale a lui Fourier.
2. Problemele speciale pentru mediile semimărginite, difracția undelor ș.a.m.d.
3. Metode variaționale în fizica-matematică.
4. Rezolvarea aproximativă a problemelor din fizica-matematică cu ajutorul metodei diferențelor finite.

Tot din categoria acestor chestiuni foarte importante face parte și teoria ecuațiilor neliniare.

Cadrul cursului nostru nu ne-a permis să ne oprim asupra acestor chestiuni. Totuși, un cititor atent care a făcut cunoștință în aceste lecții cu noțiunile fundamentale din teoria ecuațiilor fizicii-matematice va putea, credem, să adîncească independent cărțile moderne și articolele de revistă consacrate acestor chestiuni.

INDEX

Aproximarea cu ajutorul funcțiilor sferice 465
Armonice sferice 465
Armonice sferice aproximarea cu ajutorul funcțiilor sferice 465
Armonice sferice ecuațiile diferențiale ale funcțiilor sferice 470
Arzela, teorema lui 399
Argument întîrziat 222

Bernoulli Daniel 12

Caracteristici 51
Caracteristicile ecuației undelor 215
Cauchy, datele lui 33
Clasificarea ecuațiilor liniare de ordinul al doilea 40
Coardă 10
Coardă cu ambele extremități fixate 58
Coardă infinită 54
Coardă vibrantă 10, 54
Coeficienții lui Fourier 374
Comportarea la infinit a potențialului de dublu strat 249
Comportarea la infinit a potențialului de simplu strat 249
Condiții inițiale sau datele lui Cauchy 33
Condiții la limită sau condiții pe frontieră 33
Condiții la limită, inițiale 30
Continuitatea absolută a integralei lui Lebesgue 108
Continuitatea uniformă 90
Convergență în medie a funcțiilor sumabile 125
Convergență în medie ponderată 401
Coordonate cilindrice, ecuația lui Laplace 445
Coordonate curbilinii, sferice și cilindrice 445
Coordonate normale 444
Densitatea liniară a coardei 10
Dependența soluției de condițiile la limită și de condițiile inițiale 35
Deplasare remanentă 57
Derivata integralelor improprii în raport cu un parametru 144
Derivata normală a potențialului de dublu strat 247
Derivata normală regulată 245
Descompunerea rezolvantei 431
Diferența a două mulțimi 87
Distanța unui punct la o mulțime închisă 98
Divergență 8
Domeniu 73

Echilibrul coardei 11
Echilibrul membranei 13, 33, 329
Ecuația căldurii 21, 32
Ecuația căldurii formularea corectă a problemei mixte 340
Ecuația căldurii soluția problemei mixte 372
Ecuația căldurii soluția generalizată 344, 361
Ecuația coardei vibrante 10,54
Ecuația de continuitate 20
Ecuația de propagare a căldurii 149
Ecuația de propagare a sunetului, v. și ecuația undelor 28
Ecuația de tip parabolic 47
Ecuația integrală asociată 279
Ecuația lui Bessel 430, 451
Ecuația lui Laplace 20, 165
Ecuația lui Laplace în coordonate sferice și cilindrice 445
Ecuația lui Laplace în coordonate curbilinii 445
Ecuația lui Laplace în plan 257
Ecuația lui Poisson 165
Ecuația lui Poisson în plan 257
Ecuația lui Poisson pentru un mediu infinit 189
Ecuația lui Sturm-Liouville 429
Ecuația lui Volterra 274
Ecuația neomogenă a coardei vibrante 383
Ecuația seculară 381

Ecuaţia undelor 215, 348
Ecuaţia undelor. Corectitudinea problemei lui Cauchy 223
Ecuaţia undelor, soluţii generalizate 354
Ecuaţia integrală neomogenă cu nucleu simetric 431
Ecuaţii integrale 254, 268
Ecuaţii integrale cu nucleu degenerat 275
Ecuaţii integrale cu nucleu simetric ponderat, funcţii proprii ale unei 391
Ecuaţii liniare de ordinul al doilea 40, 318
Ecuaţiile diferenţiale ale funcţiilor sferice 470
Ecuaţiile hiperbolice, a doua formă canonică 50
Ecuaţiile hiperbolice în plan, prima problemă la limită pentru 67
Ecuaţii integrale cu nucleu nemărginit de formă specială 290
Ecuaţii integrale cu nucleu simetric real 391
Ecuaţii integrale Fredholm, de speţa a doua 255, 268
Ecuaţii integrale neomogene cu nucleu simetric 431
Euler 12
Exemplul lui Hadamard 35

Flux (vector) de căldură 24
Forma canonică a ecuaţiei 44
Forma canonică a ecuaţiei cu două variabile independente 46
Formă hiperbolică, parabolică, eliptică 47
Forme pătratice 40
Formula biliniară 408
Formula lui d'Alembert 54
Formula lui Green 74
Formula lui Green pentru ecuaţia lui Laplace 167
Formula lui Green pentru ecuaţiile diferenţiale ordinare de ordinul al doilea 301
Ecuaţia lui Kirchhoff 221
Ecuaţia lui Laplace 482
Formula lui Ostrogradsky 7
Formula lui Poisson 199, 223, 263
Formula lui Riemann 78
Forţe transversale 11
Frecvenţe proprii 386
Front de undă anterior, posterior 225
Frontiera unei mulţimi deschise 88
Funcţia armonică 178
Funcţia armonică comportarea ei în vecinătatea unui punct singular 180
Funcţia armonică comportarea ei la infinit 185
Funcţia de influenţă 312
Funcţia generatoare a polinoamelor lui Legendre 480
Funcţia lui Green generalizată 319
Funcţia lui Green pentru ecuaţia liniară de ordinul al doilea 318
Funcţia lui Green pentru operatorul lui Laplace pe sferă 313, 329
Funcţia lui Green pentru problema lui Dirichlet 329
Funcţia lui Green pentru problema lui Neumann 335
Funcţia lui Riemann 77
Funcţia lui Riemann pentru ecuaţia adjunctă 80,
Funcţia măsurabilă 103
Funcţia reprezentabilă prin surse 415
Funcţii analitice, reprezentarea solu ţiilor cu ajutorul lor 433
Funcţii care coincid aproape peste tot 119
Funcţii echivalente 120
Funcţii normate 354, 374, 421
Funcţii sumabile 103
Funcţiile lui Bessel 451
Funcţiile lui Bessel şi Neumann, expresiile lor asimtotice 453, 454
Funcţiile lui Hankel 453
Funcţiile lui Hankel, expresiile lor asimptotice 454
Funcţiile lui Neumann 452
Fundamentarea metodei lui Fourier 372, 421

Inegalitatea lui Bessel 414
Inegalitatea lui Buniakovski 359
Inegalitatea lui Minkowski 366
Integrala interioară 8
Integrala interioară a lui Lebesgue 84
Integrala nedefinită 111
Integrala pe o mulţime măsurabilă 116
Integrale care depind de un parametru 140
Integrale Lebesgue egal şi absolut continue 134
Integrale multiple 84
Integrale pe mulţimi deschise 90

Integrale pe mulţimi mărginite şi închise 97
Integrale uniform convergente pentru o valoare dată a parametrului 140
Impuls iniţial 57
Interpretarea geometrică a potenţialului de dublu strat 172
Intersecţie de mulţimi 86, 101
Încărcare 391
Închiderea unei mulţimi 87

Lema lui Liapunov 331
Limita inferioară (cea mai mică) a unui şir 129
Limita superioară (cea mai mare) a unui şir 130

Măsura Lebesgue a unei mulţimi deschise, închise 101
Media aritmetică 176
Membrană 13, 32, 443
Metoda aproximaţiilor succesive 269
Metoda lui Fourier 372, 445
Metoda lui Kirchhoff 216
Metoda lui Riemann 67, 75
Mişcarea unui fluid 16
Mişcarea unui fluid incompresibil 19
Mişcarea potenţială a unui fluid incompresibil 27
Mişcarea staţionară a unui fluid omogen incompresibil 20, 34
Mulţime compactă de funcţii 399
Mulţime conexă 85
Mulţime conexă de puncte 86
Mulţime de funcţii egal continuă 399
Mulţime de funcţii mărginită în medie 400
Mulţimi închise de puncte 85
Mulţimi de puncte de măsură nulă 119, 126
Mulţimi de puncte nicăieri densă 88
Mulţime măsurabilă 116
Mulţime-reţea interioară 91
Mulţime vidă de puncte 86, 95
Mulţimi închise de puncte, integrale pe mulţimi închise 85
Mulţimi-reţele interioare, sistem exhaustiv de 91

Nucleu 268
Nuclee aproape regulate 402, 420
Nucleu de formă specială 281
Nucleu degenerat 275
Nucleu nemărginit de formă specială 290
Nucleu pozitiv definit 417
Nucleu simetric 391, 408, 430, 431
Nucleu simetric cu pondere 391
Nucleu simetric ponderat 430

Operator adjunct 72, 304
Operator asociat 279
Operator autoadjunct 72, 304
Operator complet continuu 391, 400
Operator complet continuu în sens tare 402
Operator integral 400
Operatori diferenţiali cu o singură variabilă independentă 300
Operatori diferenţiali adjuncţi 72
Operatorul lui Laplace 15
Operatorul lui Laplace pe sferă 471
Operatorul diferenţial de ordinul al doilea, termenul lui principal 46
Ortogonalitatea funcţiilor 279, 374
Oscilaţii armonice 380
Oscilaţiile sistemelor mecanice cu număr finit de grade de libertate 380

Parametru, integrale care depind de un 140
Parametru, ecuaţii integrale cu 269
Partea pozitivă, negativă a unei funcţii 109
Potenţial de simplu strat 170, 232
Potenţial de dublu strat 170, 232
Potenţial de dublu strat, interpretarea geometrică 235
Potenţial electric 172
Potenţial întârzietor 215
Potenţial gravific 171
Potenţial logaritmic 260, 262, 264, 265
Potenţial magnetic 172
Potenţial newtonian 171, 191
Potenţialele de simplu strat şi de dublu strat, comportarea la infinit 249
Potenţialul lui Robin 297
Polinoame armonice 461
Polinoamele lui Legendre, 478, 479
Polinoamele lui Legendre, reprezentarea asimtotică 485
Pondere 391
Problema exterioară a lui Dirichlet 202, 251, 294
Problema exterioară a lui Neuman 251, 294
Problema interioară a lui Dirichlet 251, 294
Problema interioară a lui Neumann 251, 294

Problema lui Cauchy 33, 53, 75, 157
Problema lui Cauchy pentru ecuația căldurii 149
Problema lui Cauchy pentru ecuația undelor 216, 225
Problema lui Dirichlet 33
Problema lui Dirichlet, aplicarea teoriei lui Fredholm la 292
Problema lui Dirichlet, pt. semiplan 260
Problema lui Dirichlet, pentru semispațiu 205
Problema lui Dirichlet, pentru sferă sub forma unei serii de polinoame armonice 195, 469, 484
Problema lui Dirichlet, reducerea la ecuații integrale 251
Problema lui Neumann 34
Problema lui Neuman, aplicarea teoriei lui Fredholm la 292
Produs scalar 395
Perturbație inițială 57
Prelungirea soluției 83
Punct singular al unei funcții armonice 180, 259
Puncte conjugate 185
Puncte limită 86
Punerea corectă a problemei lui Cauchy pentru ecuația căldurii 149, 340
Punerea corectă a problemelor la limite din fizica matematică 340

Rangul unei valori proprii 279
Reuniune de mulțimi 86
Rezonanță 387

Separarea completă a variabilelor 438
Separarea completă a variabilelor în ecuația $\Delta u = 0$ în coordonate polare 455
Separarea variabilelor 372
Seria biliniară pentru nucleul iterat 419
Serie convergentă în sensul lui Lebesgue 134
Sfera plină, problema lui Dirichlet pentru 195
Sistem complet de funcții 374
Sistem de funcții liniar independente 276
Sistem interior de mulțimi 120
Soluția fundamentală a ecuației căldurii 149
Soluția fundamentală a ecuației lui Laplace 167, 258
Soluția generalizată a ecuației undelor 354
Soluția lui d'Alembert 55
Soluțiile generalizate ale ecuației căldurii 344
Soluțiile generalizate ale ecuațiilor omogene 361
Stabilitatea după Liapunov 39
Spectrul frecvențelor proprii ale oscilațiilor 386
Suprafață Liapunov 232
Suprafață netedă pe porțiuni 8
Șir convergent în sine 131, 134
Tensiune 10
Teorema inerției formelor pătratice 42
Teorema lui Egorov 116, 121
Teorema lui Riesz-Fischer 357, 368
Teoria lui Fubini-Lebesgue 136
Teoria lui Hilbert-Schmidt 417
Teoria lui Liapunov 247
Teoria lui Liouville 189
Teoria lui Mercer 421
Teoria maximului 165
Teoremele lui Fredholm 280 și următoarele
Teoria relativității 46
Teoria stabilității 39
Tipul ecuației 45
Tip hiperbolic normal 45
Tip hiperbolic-parabolic 45
Tip eliptico-parabolic 45
Tip parabolic normal 45
Transformările lui Lorentz 46

Undă directă, inversă 56
Unde acustice 25
Unde sferice 219
Unghi solid 173
Unghi solid elementar 175

Valori proprii 279, 373
Valori proprii, existența unei 405
Valorile proprii ale unei ecuații integrale 279, 396, 405
Vibrațiile coardei cu extremități fixate 31
Vibrațiile libere ale coardei 54
Vibrațiile longitudinale ale unei bare 387
Vibrațiile membranei 13, 15, 32
Vibrațiile paralelipipedului dreptunghi 438
Vibrațiile unei membrane circulare 455
Vibrațiile unei membrane dreptunghiulare 443
Viteză aparentă a mișcării suprafeței 18

TABLA DE MATERIE

Pag.

Prefață la ediția întîia 5
Prefață la ediția a doua 6

Lecția I. **Deducerea ecuațiilor fundamentale** 7
§ 1. Formula lui Ostrogradsky 7
§ 2. Ecuația coardei vibrante 10
§ 3. Ecuația vibrațiilor membranei 13
§ 4. Ecuația continuității pentru mișcarea unui fluid și ecuația lui Laplace 16
§ 5. Ecuația căldurii 21
§ 6. Unde acustice 25

Lecția II. **Punerea problemelor fizicii matematice. Exemplul lui Hadamard** 30
§ 1. Condiții inițiale și condiții la limită 30
§ 2. Noțiunea de problemă corect pusă. Exemplul lui Hadamard. . 35

Lecția III. **Clasificarea ecuațiilor liniare de ordinul al doilea** 40
§ 1. Ecuațiile liniare și formele pătratice. Forma canonică a ecuației 40
§ 2. Forma canonică a ecuațiilor cu două variabile independente 46
§ 3. A doua formă canonică a ecuațiilor hiperbolice cu două variabile independente 50
§ 4. Caracteristice 51

Lecția IV. **Ecuația coardei vibrante și rezolvarea ei cu ajutorul metodei lui d'Alembert** 54
§ 1. Formula lui d'Alembert. Coarda infinită 54
§ 2. Coarda cu ambele extremități fixate 58
§ 3. Rezolvarea problemei în cazul ecuației neomogene și pentru condiții inițiale mai generale 60

Lecția V. **Metoda lui Riemann** 67
§ 1. Prima problemă la limită pentru ecuațiile hiperbolice . . . 67
§ 2. Operatori diferențiali adjuncți 72
§ 3. Metoda lui Riemann 75
§ 4. Funcția lui Riemann pentru ecuația adjunctă 80
§ 5. Cîteva consecințe calitative ale formulei lui Riemann. 82

Lecția VI. **Integrale multiple** 84
§ 1. Mulțimi de puncte închise și deschise 85
§ 2. Integralele funcțiilor continue pe mulțimi deschise 90
§ 3. Integralele funcțiilor continue pe mulțimi mărginite și închise 97
§ 4. Funcții sumabile 103
§ 5. Integralele nedefinite ale funcțiilor de o singură variabilă. Exemple 111

Pag.

§ 6. Mulțimi măsurabile: teorema lui Egorov 116
§ 7. Convergența în medie a funcțiilor sumabile 125
§ 8. Teorema lui Lebesgue-Fubini 136

Lecția VII. **Integrale care depind de un parametru** 140
§ 1. Integrale uniform convergente pentru o valoare dată a parametrului 140
§ 2. Derivata integralelor improprii în raport cu parametrul 144

Lecția VIII. **Ecuația propagării căldurii** 149
§ 1. Soluția fundamentală 149
§ 2. Rezolvarea problemei lui Cauchy 157

Lecția IX. **Ecuația lui Laplace și ecuația lui Poisson** 165
§ 1. Teorema maximului 165
§ 2. Soluția fundamentală. Formula lui Green 167
§ 3. Potențialul de volum, de simplu strat și de dublu strat 170

Lecția X. **Cîteva consecințe generale ale formulei lui Green** 176
§ 1. Teorema mediei aritmetice 176
§ 2. Comportarea unei funcții armonice în vecinătatea unui punct singular 180
§ 3. Comportarea unei funcții armonice la infinit. Puncte conjugate 185

Lecția XI. **Ecuația lui Poisson într-un mediu nelimitat. Potențial newtonian** 189

Lecția XII. **Rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru sferă** 195

Lecția XIII. **Problemele lui Dirichlet și Neumann pentru semispațiu** . 205

Lecția XIV. **Ecuația undelor și potențialele întîrziate** 215
§ 1. Caracteristicele ecuației undelor 215
§ 2. Metoda lui Kirchhoff pentru rezolvarea problemei lui Cauchy 216

Lecția XV. **Proprietățile potențialului de simplu strat și de dublu strat** 232
§ 1. Observații generale 232
§ 2. Proprietățile potențialului de dublu strat 233
§ 3. Proprietățile potențialului de simplu strat 239
§ 4. Derivata normală regulată 245
§ 5. Derivată normală a potențialului de dublu strat 247
§ 6. Comportarea potențialelor la infinit 249

Lecția XVI. **Reducerea problemelor lui Dirichlet și Neumann la ecuațiile integrale** 251
§ 1. Punerea problemelor și unicitatea soluțiilor lor 251
§ 2. Ecuațiile integrale ale problemelor formulate. 254

Lecția XVII. **Ecuația lui Laplace și ecuația lui Poisson în plan** 257
§ 1. Soluția fundamentală 257
§ 2. Probleme fundamentale 259
§ 3. Potențialul logaritmic 264

Lecția XVIII. **Teoria ecuațiilor integrale** 268
§ 1. Observații generale 268
§ 2. Metoda aproximațiilor succesive 269
§ 3. Ecuația lui Volterra 274

Pag.

§ 4. Ecuații cu nucleu degenerat 275
§ 5. Nucleu de formă specială. Teoremele lui Fredholm pentru cazul general 281
§ 6. Generalizarea rezultatelor 286
§ 7. Ecuații cu nuclee nemărginite de formă specială 290

Lecția XIX. **Aplicarea teoriei lui Fredholm la rezolvarea problemelor lui Dirichlet și Neumann** 292
§ 1. Deducerea proprietăților ecuațiilor integrale 292
§ 2. Studiul ecuațiilor 294

Lecția XX. **Funcția lui Green** 300
§ 1. Operatori diferențiali cu o singură variabilă independentă . . 300
§ 2. Operatori adjuncți și familii adjuncte 304
§ 3. Lema fundamentală despre integralele ecuațiilor adjuncte . . 307
§ 4. Funcția de influență 312
§ 5. Funcția lui Green și construirea ei 314
§ 6. Funcția lui Green generalizată pentru ecuația liniară de ordinul al doilea 318
§ 7. Exemple 323

Lecția XXI. **Funcția lui Green pentru operatorul lui Laplace** 329
§ 1. Funcția lui Green pentru problema lui Dirichlet 329
§ 2. Funcția lui Green pentru problema lui Neumann 335

Lecția XXII. **Punerea corectă a problemelor la limite din fizica matematică** 340
§ 1. Ecuația căldurii 340
§ 2. Noțiunea de soluție generalizată 344
§ 3. Ecuația undelor 348
§ 4. Soluțiile generalizate ale ecuației undelor 354
§ 5. Proprietatea soluțiilor generalizate ale ecuațiilor omogene . . 361
§ 6. Inegalitățile lui Buniakovsky și Minkowsky 366
§ 7. Teorema lui Riesz-Fischer 368

Lecția XXIII. **Metoda lui Fourier** 372
§ 1. Separarea variabilelor 372
§ 2. Analogia dintre problema vibrațiilor unui mediu continuu și oscilațiile sistemelor mecanice cu număr finit de grade de libertate 380
§ 3. Ecuația neomogenă 383
§ 4. Vibrațiile longitudinale ale unei bare cu extremitățile libere 387

Lecția XXIV. **Ecuații integrale cu nucleu simetric real** 391
§ 1. Proprietăți simple. Operatori complet continui 391
§ 2. Demonstrația existenței unei valori proprii 405

Lecția XXV. **Formula biliniară și teorema lui Hilbert-Schmidt** 408
§ 1. Formula biliniară 408
§ 2. Teorema lui Hilbert-Schmidt 417
§ 3. Fundamentarea metodei lui Fourier pentru rezolvarea problemelor la limită din fizica matematică 421
§ 4. Aplicarea teoriei ecuațiilor integrale cu nucleu simetric 429

Lecția XXVI. **Ecuația integrală neomogenă cu nucleu simetric** 431
§ 1. Descompunerea rezolventei 431
§ 2. Reprezentarea soluției cu ajutorul funcțiilor analitice 433

Pag.

Lecția XXVII. **Vibrațiile paralelipipedului dreptunghi** 438

Lecția XXVIII. **Ecuația lui Laplace în coordonate curbilinii. Exemple de aplicare a metodei lui Fourier** 445
§ 1. Ecuația lui Laplace în coordonate curbilinii 445
§ 2. Funcțiile lui Bessel 451
§ 3. Separarea completă a variabilelor în ecuația $\Delta u = 0$ în coordonate polare 455

Lecția XXIX. **Polinoame armonice și funcțiile sferice** 461
§ 1. Definiția funcțiilor sferice 461
§ 2. Aproximarea cu ajutorul funcțiilor sferice 465
§ 3. Problema lui Dirichlet pentru sferă 469
§ 4. Ecuațiile diferențiale ale funcțiilor sferice 470

Lecția XXX. **Câteva proprietăți simple ale funcțiilor sferice** 479
§ 1. Reprezentarea polinoamelor lui Legendre 479
§ 2. Funcția generatoare 480
§ 3. Formula lui Laplace 482

Index alfabetic 486
Tabla de Materie 490

Responsabil de carte: Moscovici M.
Tehnoredactor: Vasilescu M.
Corector responsabil: Baneu .

Dat la cules 15.XII.1954. Bun de tipar 10-II.1955. Hîrtie velină 65 g/m² 61×86/16. Coli editoriale 30. Coli de tipar 31. Prețul unui exemplar legat 1/2 pînză Lei 19,80. Comanda PR 2275 A 04366. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari și mici 54.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică nr. 3 Bd. 6 Martie 29 București R. P. R.

ERATĂ

Pag.	Rîndul	În loc de:	Se va citi:	Aparținența greșelii
7	2 jos	C^2	C^7	Editurii
65	14	$\cdot at$	$-at$	„
95	12. 15. 16	Φ_k	Φ_h	„
115	2 jos	$= \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1} \Psi$	$= \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1} \Psi_0$	Tipografiei
130	10	și limita superi-	și limita inferi-	Editurii
139	9 jos	$\int_{0 \leqslant y^i \geqslant 1}$	$\int_{0 \leqslant y_i \leqslant 1}$	„
151	4 jos	$d \frac{r}{4(t_0-t)^{1/2}}$	$d \frac{r}{2(t_0-t)^{1/2}}$	„
186	8 jos	corespunzător Ω	corespunzător Ω_1	„
218	11	în locul lui t	în locul lui t_1	Tipografiei
243	12	ale porțiunii S	ale porțiunii S^*	Editurii
246	19	suprafața S	suprafața S_1	Tipografiei
255	1 jos	$\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\nu(S_1)\cos\varphi_0}{r^2} dS_1$	$\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\nu(S_1)\cos\Psi_0}{r^2} dS_1$	Editurii
263	6	$- \ln \lfloor R^2 + R_0^2 -$	$- \ln \lceil R^2 R_0^2 -$	Tipografiei
341	9. 14. 16 17. 19. 22	t	t_0	„
406	12 jos	X_1	$\varkappa_1$	Editurii
412	9 jos	P_0	$f(P_0)$	Tipografiei
430	5	L_2	L_y	Editurii
482	6 jos	$r^n Y(\theta, \varphi)$	$r^n Y_n(\theta, \varphi)$	Tipografiei

Lei 19,30

ECUAȚIILE FIZICII MATEMATICE

S. L. SOBOLEV

ECUAȚIILE FIZICII MATEMATICE

EDITURA TEHNICĂ